

Appendice B. Complementi

La presente Appendice, disponibile **solo in forma elettronica**, riporta argomenti integrativi rispetto a quelli disponibili nel libro di testo cartaceo.

L'indice analitico di questa Appendice B, strutturato in modo corrispondente all'elenco dei **capitoli del testo cartaceo**, è riportato nel seguito. Tali argomenti vanno intesi come materiale non esaustivo ad uso prevalentemente didattico.

B.1 Complementi di Caratterizzazione di antenne

- Elementi di metodi di misura di parametri di antenna
- Cenni sull'impatto ambientale di radiazioni e.m.

B.2 Complementi di Radiazione elettromagnetica

- Richiami di campi elettromagnetici
 - Teorema di unicità
 - Teorema di dualità
 - Condizioni al contorno
 - Teorema di Poynting
 - Potenziali elettrodinamici
 - Onde piane uniformi
 - Spettro di onde piane
 - Limite quantistico dell'elettromagnetismo classico
- Diffusione di radiazione elettromagnetica
 - Equazioni integrali del campo elettrico e magnetico
 - Sezioni trasverse di interazione e.m.
 - Matrice complessa di diffusione e.m.
 - Diffusione e.m. di Rayleigh

B.3 Complementi di Antenne lineari

- Antenne lineari non rettilinee
 - Antenna rombica e antenna lineare a V
 - Antenne a diedro
 - Antenna a portello e antenna a telaio
- Antenne lineari a larga banda e adattamento
 - Dipoli a larga banda e proprietà auto-scalanti di antenne
 - Antenna a elica
 - Antenne biconiche
 - Adattamento di antenne lineari a linee di trasmissione

B.4 Complementi di Antenne ad apertura e riflettore

- Apertura in campo vicino
 - Integrale di radiazione di Fresnel
 - Radiazione da apertura quadrata
 - Diffrazione da semipiano
 - Zone di Fresnel per antenne ad apertura
- Illuminatori ad alta efficienza
 - Efficienza di polarizzazione
 - Superfici corrugate
 - Trombe piramidali e coniche corrugate
- Antenne a riflettore sferico

B.5 Complementi di Allineamenti di antenne

- Sintesi di allineamenti rettilinei simmetrici
 - Allineamenti di tipo Dolph-Chebyshev
 - Esempio di sintesi Dolph-Chebyshev
- Sintesi di allineamenti rettilinei non uniformi
 - Metodo di sintesi di Schelkunoff
 - Metodo di sintesi continua di Fourier
 - Metodo di sintesi discreta di Fourier
 - Metodo di sintesi di Woodward-Lawson

B.6 Esercizi e domande di riepilogo

- Domande teoriche di verifica
- Esercizi numerici
- Uso di simulatore numerico per analisi di antenne
- Formulare riassuntivi

B.1 Complementi di Caratterizzazione di antenne

Gli argomenti trattati nell'Appendice B.1 riguardano:

- elementi di misura di parametri di antenna, importanti per la verifica quantitativa delle proprietà di un'antenna;
- cenni sull'impatto ambientale dei campi e.m., importanti per investigare gli effetti della radiazione e.m. sull'ambiente circostante e sugli organismi.

B.1.1 Elementi di misura di parametri di antenna

I metodi teorici e numerici per l'analisi e la progettazione (*sintesi* o, in inglese, “*design*”) di antenne sono strumenti preziosi i cui risultati vanno, tuttavia, verificati mediante appropriate misure sperimentali. I **parametri di antenna** di usuale interesse, definiti nei paragrafi del Cap. 1, sono i seguenti:

- diagramma di radiazione in ampiezza e fase;
- guadagno, direttività ed efficienza di radiazione;
- impedenza (auto e mutua in presenza di altre antenne);
- distribuzione di corrente;
- polarizzazione.

Le misure su antenne si effettuano usualmente nella **modalità di ricezione**. Grazie alle proprietà di reciprocità, le misure di parametri in ricezione sono riconducibili a quelle in trasmissione. La condizione ideale per effettuare le misure di parametri in campo lontano è quella di illuminazione dell'antenna in ricezione con un'onda piana uniforme sia in ampiezza che in fase. Anche se tale condizione ideale è difficilmente realizzabile, può essere approssimata separando l'antenna in prova (in inglese, **Antenna Under Test**: AUT) dall'antenna sorgente attraverso una distanza R almeno uguale o superiore a quella critica di campo lontano. Le misure sperimentali dei parametri di antenna soffrono, in generale, di diversi problemi:

- per misure di solido di radiazione, la distanza di campo lontano è spesso eccessiva e può essere affetta da riflessioni e diffrazioni non desiderate;
- può essere impraticabile spostare l'antenna dal sito operativo al sito di misura;
- per alcune antenne, come gli allineamenti a scansione, il tempo richiesto per effettuare la misura può essere enorme;
- sistemi di misura in ambiente esterno (*outdoor*) sono esposti agli agenti meteorologici non prevedibili;
- sistemi di misura in ambiente interno (*indoor*) possono non ospitare grandi antenne (ad esempio per aerei e navi);
- tecniche di misura sperimentali sono usualmente dispendiose.

Molte delle problematiche sopra elencate sono riassunte nel documento tecnico **IEEE Standard Test Procedures for Antennas, IEEE Std 149-1979**. Alcune

soluzioni a tali problemi hanno portato allo sviluppo delle misure in camere anecoiche, tecniche basate su spazi compatti (in inglese, *compact ranges*) e metodi di estrapolazione, tecniche di misure in campo vicino (in inglese, *near-field probing*), e tecniche di misura polarizzate e misure a frequenza variabile (in inglese, *swept-frequency measurements*). Nel seguito daremo dei cenni sulla classificazione dei metodi di misura e alcuni esempi.

B.1.1.1 Spazi di misura di antenna (antenna ranges)

La misura e la valutazione delle prestazioni di un'antenna si può, in generale, effettuare in:

- **spazi esterni** (in inglese, *outdoor*) che hanno il vantaggio di accogliere ogni tipo di antenna, ma sono condizionati da effetti ambientali e riflessioni del campo elettromagnetico non desiderate.
- **spazi interni** (in inglese, *indoor*) che consentono di controllare gli effetti ambientali, ma non sono adatti per antenne ingombranti e richiedono strutture molto grandi per realizzare la condizione di campo lontano.

Si suole distinguere gli spazi anche rispetto ai fenomeni predominanti di propagazione utilizzati, in particolare la presenza della sola **onda diretta** o la considerazione dell'**onda riflessa**.

Le **tecniche di riflessione** (in inglese, *reflection ranges*) sono metodi in cui si utilizza l'interferenza costruttiva tra l'onda diretta e l'onda riflessa dovuta a riflessioni dal **suolo**; l'altezza e distanza dell'antenna in prova consente di controllare, in linea di principio, tali effetti. Il modello di effetto del suolo, visto nel Cap. 1, è di estrema utilità in questo contesto. La geometria schematica di misura è riportata in figura B.1.1.

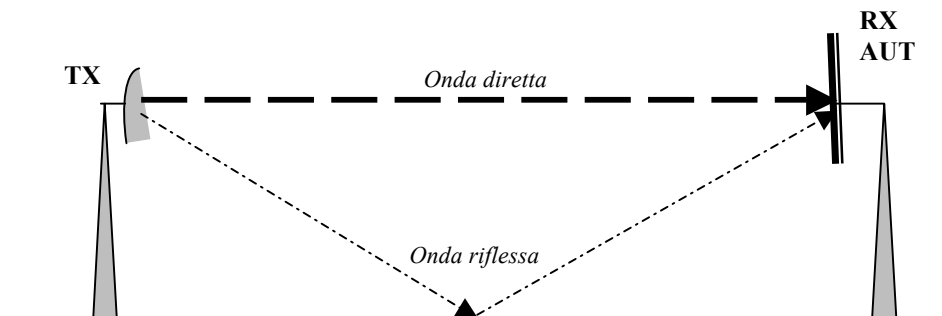


FIGURA B.1.1 Schema per tecnica di misura di riflessione in spazi esterni.

Nelle **tecniche di spazio libero** (in inglese, *free-space ranges*) si sfrutta la sola **onda diretta** e si tende a sopprimere i contributi di riflessione e diffrazione dovuti all'ambiente circostante. Alcune tecniche di misura di spazio libero sono descritte nel seguito.

1. **Spazi elevati** (in inglese, *elevated ranges*). La geometria schematica di misura è riportata in figura B.1.2. Sia l'antenna AUT che trasmittente (TX) sono alte rispetto al terreno (possibilmente piatto) e circa alla stessa altezza (montaggio su tetti o torri). Si utilizzano nel caso di antenne direttive, quando la visibilità tra le antenne è garantita e spesso in sinergia con tecniche di elaborazione del segnale per eliminare interferenze.

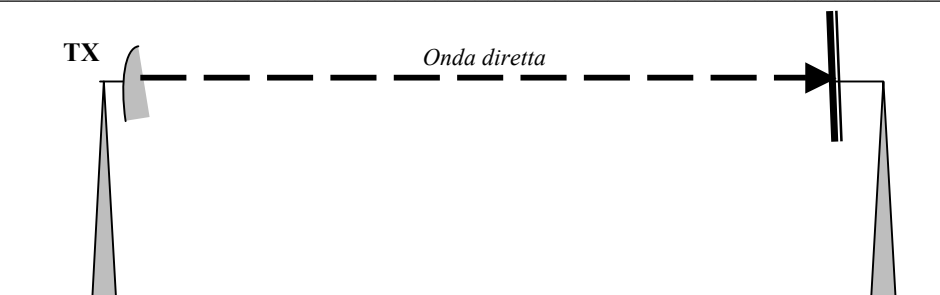


FIGURA B.1.2 Schema per tecnica di misura in spazi elevati.

2. **Spazi inclinati** (in inglese, *slant ranges*). La geometria schematica di misura è riportata in figura B.1.3. In tal caso, l'antenna AUT è elevata mediante una torre in fibra di vetro, mentre l'antenna TX è al suolo. Tale configurazione risulta relativamente compatta ed elimina l'effetto dell'onda riflessa.

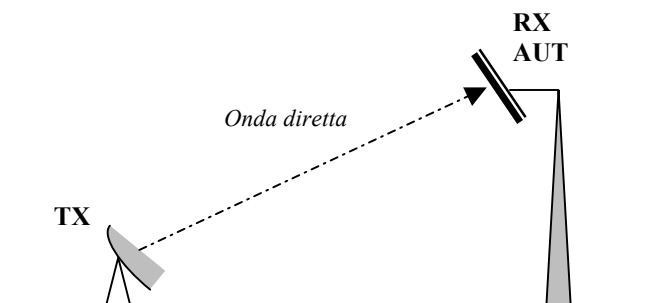


FIGURA B.1.3 Schema per tecnica di misura in spazi inclinati.

3. **Camere anecoiche** (in inglese, *anechoic chambers*). La geometria schematica di misura è riportata in figura B.1.4. Sono camere chiuse al cui interno si effettua la misura usando le antenne TX e AUT. Le pareti della camera sono ricoperte di materiale assorbente a radiofrequenza, usualmente a forma di coni o piramidi, in modo da minimizzare le riflessioni (tipicamente, con coefficienti di riflessione delle pareti fino a -40 dB per usi tra 100 MHz a 10 GHz). Sono utilizzate due configurazioni prevalenti di camere anecoiche: **rettangolari**, a forma di parallelepipedo, e **rastremate**, a forma di tromba piramidale. L'uso a frequenze elevate è critico in quanto è complicato posizionare l'antenna AUT in modo da

ridurre le interferenze tra il campo diretto e quelle residuale riflesso; in tale caso, si utilizzano antenne TX molto direttive.

Le misure in camera anecoica prevedono, in genere, la seguente strumentazione:

- **Antenna sorgente:** usualmente un'antenna log-periodica a larga banda per frequenze $<1\text{GHz}$, paraboloidi con illuminatori a larga banda per frequenze $>400\text{ MHz}$ o grandi antenne a tromba. Per il controllo di polarizzazione si usano, per esempio, allineamenti ortogonali di log-periodiche.
- **Sistema trasmettente:** deve essere munito di un controllo di frequenza, di stabilità, di purezza spettrale, di livello di potenza e di modulazione adeguati.
- **Sistema ricevente:** è spesso un rivelatore bolometrico di potenza, seguito da un amplificatore, o un sistema ricevente di tipo supereterodina.
- **Sistema di posizionamento:** è un piedistallo usato per ruotare l'antenna in azimuth e elevazione, distinguendo sistemi rotazionali azimuth-su-elevazione e sistemi rotazionali elevazione-su-azimuth.
- **Sistema di elaborazione dati:** è un calcolatore elettronico che elabora il segnale ricevuto in congiunzione con analizzatori di rete per la misura di modulo e fase.
- **Sistema di registrazione:** sono sistemi di archiviazione e grafica in forma cartesiana o polare, usualmente posti fuori dalla camera anecoica.

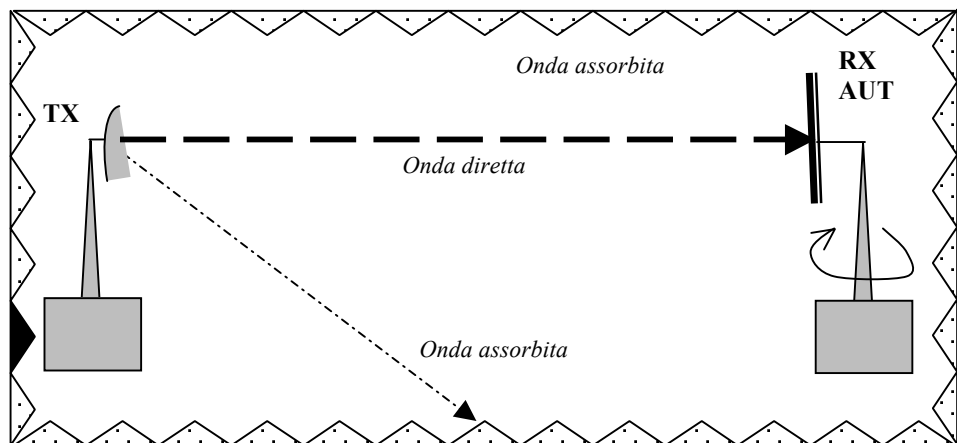


FIGURA B.1.4 Schema per tecnica di misura in camere anecoiche rettangolari.

4. **Spazi compatti** (in inglese, *compact ranges*). La geometria schematica di misura è riportata in figura b.1.5. Sono ambienti in cui si usa un'antenna a collimazione di fascio irradiato che genera un'onda quasi piana uniforme in brevi distanze (tipicamente 10 o 20 m), minori di quelle necessarie per le condizioni di campo lontano (come vedremo, quando $r > 2D_a^2/\lambda$, essendo D_a la dimensione dell'antenna). Le antenne collimatrici del fascio per spazi compatti (in inglese,

Compact Antenna Test Range: CATR) sono, in genere, antenne a riflettore di tipo parabolico (come in figura), Cassegrain, Gregoriana (si veda cap. 5). I problemi realizzativi, analizzati mediante ottica geometrica o fisica, sono quelli tipici di antenne a riflettore quali blocco del fascio, diffrazione ai bordi, depolarizzazione.

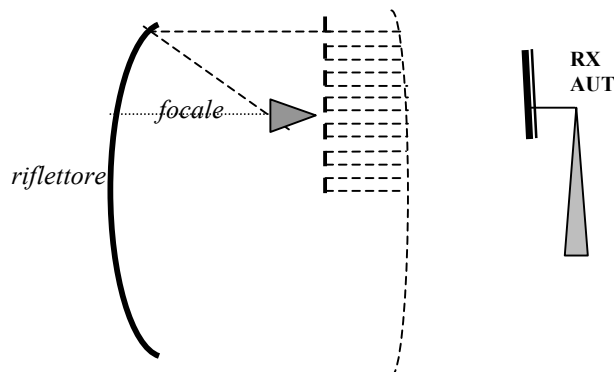


FIGURA B.1.5 Schema per tecnica di misura in spazi compatti.

5. **Tecniche di campo vicino** (in inglese, *near-field/far-field techniques*). La geometria schematica di misura è riportata in figura B.1.6. Sono metodi che prevedono misure in campo vicino dell'antenna AUT (ovvero, per $r < 2D_a^2/\lambda$) e utilizzano tecniche analitiche per trasformare il risultato in campo lontano, dove in genere le misure sono di maggiore interesse applicativo. Consentono di ridurre le distanze di misura, si applicano prevalentemente per la valutazione del diagramma di radiazione e sono effettuate in ambienti interni. Il problema elettromagnetico, di elevata complessità computazionale, è affrontato mediante metodi di **sviluppo modale** del campo irradiato tangenziale su superfici piane, cilindriche o sferiche su cui si effettuano le misure sperimentali (applicazione del teorema di equivalenza).

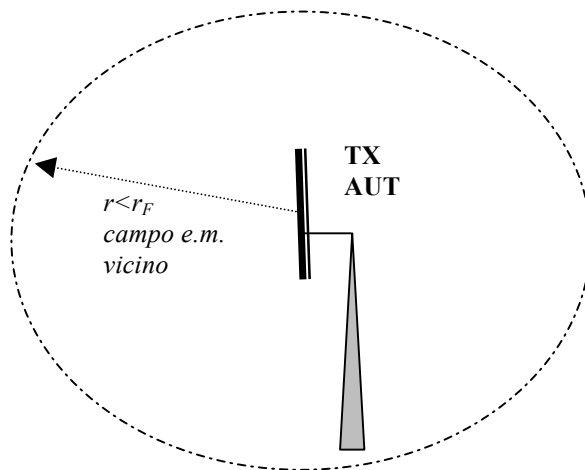


FIGURA B.1.6 Schema per tecnica di misura in campo vicino.

B.1.1.2 Misure di solido di radiazione e guadagno massimo

Come esempio di tecnica di misura su antenne, consideriamo il problema della caratterizzazione del solido di radiazione e del guadagno massimo. Il solido di radiazione è la rappresentazione tri-dimensionale in coordinate sferiche del campo irradiato in modulo e fase dall'antenna AUT. Si ricorre spesso a misure lungo i piani principali per cui si misurano, in realtà, diagrammi di radiazione (si veda par. 1.4).

La **misura del guadagno** di antenna si effettua usando tecniche di spazio libero per frequenze $>1\text{GHz}$, oppure tecniche di riflessione per frequenze inferiori tra 0.1 e 1 GHz . Per frequenze $<0.1\text{ GHz}$, le antenne hanno dimensioni troppo grandi e le misure avvengono *in situ*, tenendo conto degli effetti propagativi del terreno.

Esistono due metodi fondamentali per la misura del guadagno di un'antenna, basati sull'equazione di Friis e rispettivamente usati per calibrare l'antenna di riferimento e misurare successivamente l'AUT:

Metodo del guadagno assoluto. Tale metodo è utilizzato per calibrare un'antenna che può essere utilizzata come standard o riferimento per altre misure, e non richiede la conoscenza a priori del guadagno delle antenne. Le due antenne standard universalmente accettate sono:

- **dipolo risonante a $\lambda/2$** con guadagno di circa 2.1 dB a polarizzazione lineare; la purezza di polarizzazione in spazio libero è eccellente, ma l'ampio fascio di radiazione la rende soggetta a deleteri effetti ambientali.
- **antenna a tromba** con guadagno tra 12 e 25 dB a polarizzazione lineare; mostra una minore purezza di polarizzazione (in spazio libero, è ellittica con rapporto assiale $> 40\text{ dB}$), ma è meno esposta a effetti ambientali essendo più direttiva.

Nella **tecnica delle 2 antenne**, si utilizza un'antenna TX uguale a quella RX, per cui dall'equazione di Friis (in dB) si ha nella direzione di puntamento:

$$[B.1.2] \quad G_{MR_{dB}} = G_{MT_{dB}} = \frac{1}{2} \left[10 \log_{10} \left(\frac{W_R}{W_T} \right) + 10 \log_{10}(L_{FS}) + 10 \log_{10}(L_{PA}) \right]$$

dove il fattore " $1/2$ " è dovuto all'assunzione di identità tra le antenne. La relazione ci permette di ricavare i due guadagni dalle misure delle potenze e dalla conoscenza dei fattori di perdita.

Metodo del guadagno comparativo. Tale metodo usa l'antenna standard calibrata come riferimento per misurare il guadagno dell'antenna AUT. Può essere usato sia in tecniche di riflessione che di spazio libero, sia in spazi interni che esterni ovvero *in situ*. Tale metodo richiede due insiemi di misure in una configurazione di misura identica dove come antenna in ricezione viene usata prima quella AUT e poi quella standard:

- Nella prima fase come antenna ricevente si usa l'antenna AUT con guadagno incognito G_{Aut} e la potenza ricevuta W_{Raut} da un carico adattato viene misurata e registrata;

- Nella seconda fase come antenna ricevente si usa l'antenna standard (STD) con guadagno noto G_{Mstd} e la potenza ricevuta W_{Rstd} da un carico adattato viene misurata e registrata;
- Facendo il rapporto tra le equazioni di Friis nei due casi e semplificando, si ottiene la relazione che ci permette di calcolare il guadagno incognito:

$$[B.1.2] \quad G_{Maut_dB} = G_{Mstd_dB} + 10 \log_{10} \left(\frac{W_{Raut}}{W_{Rstd}} \right)$$

dove l'eguaglianza vale per le quantità espresse in decibel.

B.1.2 Cenni sull'impatto ambientale di radiazioni e.m.

L'ambiente naturale è sorgente di campi elettromagnetici ad amplissimo spettro di frequenze. A questo campo elettromagnetico naturale "di fondo" si è sovrapposto il campo elettromagnetico irradiato e indotto da sistemi di radiotrasmissione in diverse bande. La sovrapposizione di queste sorgenti elettromagnetiche rappresenta il campo elettromagnetico cui gli'uomo è esposto.

B.1.2.1 Sorgenti di radiazione ed esposizione al campo e.m.

Il *campo e.m. di origine naturale* ha diverse sorgenti così schematizzabili:

- **Origine atmosferica.** È prodotto dalla ionizzazione atmosferica da parte del Sole e dalle scariche di fulmini in celle temporalesche per frequenze $f < 30$ MHz.
- **Origine terrestre.** La terra (corpo a circa 300 K di temperatura) emette la maggior parte di energia elettromagnetica nell'infrarosso con valori dell'ordine 3 mWm⁻² per $f < 3000$ GHz.
- **Origine extra-terrestre.** La troposfera e la ionosfera si comportano da schermi rispetto a sorgenti esterne al nostro pianeta, eccetto che per le bande tra 10-50 GHz e in alcune bande del visibile e infrarosso. Le sorgenti più potenti sono: quella solare (dipendente anche da fenomeni quali le macchie solari tra 500 MHz e 10 GHz), quella planetaria (dominata dalle emissioni di Giove nell'intervallo 0.03-30 GHz), quella lunare (apprezzabile nella banda delle microonde e infrarosso essendo a temperature tra 100 e 300 K), quella galattica (presente tra 0.01 e 10 GHz, con potenze dell'ordine di 10-19 Wm⁻²Hz⁻¹; la sorgente supernova Cassiopea-A è quella più intensa), quella cosmica (radiazione di tipo termico con temperatura di brillantezza pari a circa 3 K).

Al campo e.m. di origine naturale si sovrappone quello di *origine artificiale*, generato da apparati prodotti dall'uomo, le cui principali sorgenti sono:

- **Linee di trasmissione di energia elettrica.** Viene distribuita in alternata a 50 Hz e diverse tensioni fino a centinaia di kV, mentre quella ferroviaria è continua a 3 kV.
- **Sistemi di telecomunicazione e telerilevamento.** Le principali sorgenti sono i telefoni cellulari (operanti a 0.9-2 GHz con potenze dell'ordine di 1 W e con

assorbimenti specifici nella testa umana anche maggiori di 1 W kg^{-1}), gli impianti trasmettenti di radiodiffusione e televisione (ad ampia copertura angolare nelle frequenze tra 300 kHz e 800 MHz), sistemi specifici di comunicazione e radionavigazione (direttivi con ampia copertura da 3 kHz in su), ponti radio e sistemi radar (molto direttivi tra 1 e 90 GHz).

- **Apparati industriali, scientifici e tecnici.** Sono sistemi che operano tipicamente tra 60 kHz e 246 GHz e possono originare, in modo indesiderato, radiazione elettromagnetica.

Per un apparato elettronico, ai fini dell'analisi della sua compatibilità e.m. con l'ambiente circostante, è anche utile definire la sua *suscettività*, ovvero il grado di disturbo percepito dal sistema quando investito da campi e.m. presenti nell'ambiente in cui esso stesso opera, e la sua *emissività*, ovvero la tipologia e intensità di radiazioni e.m. non intenzionali prodotte dal sistema stesso.

L'esposizione al campo elettromagnetico può avvenire nell'ambiente, nei luoghi di lavoro e nei luoghi residenziali. In particolare, si evidenziano per ciascun ambito le seguenti sorgenti.

- **Esposizione ambientale:** radiotrasmettitori (con densità di potenze di esposizione per persona dell'ordine di $50 \mu\text{Wm}^{-2}$, forni a microonde (operanti a 2.45 GHz con potenze tra 0.3-1 kW e densità di potenze di esposizione dell'ordine di $10 \mu\text{Wcm}^{-2}$ a 1 m di distanza), sistemi anti-intrusione (con potenze simili a quelle dei forni, ma operanti con continuità), sistemi di radionavigazione (con livelli di esposizione bassi ed in prossimità di zone aereoportuali), linee elettriche (con esposizioni elevate dovute a campi elettrici tra 1-10 kVm^{-1} , soprattutto a metà tra i piloni di sostegno).
- **Esposizione lavorativa:** sistemi di telecomunicazione e radar (con livelli di campo in prossimità fino a -10 kVm^{-1}), sistemi radar impulsivi (fino a -10 MWm^{-2} , ma con riduzione di un fattore 1000 a causa del ciclo di lavoro e fattore 100 per la scansione), macchinari di saldaggio (per incollaggio si usano frequenze intorno a 27 MHz) e di riscaldamento (emissioni dovute ad avvolgimenti), terminali video (con sorgenti a frequenza tra 15 e 125 kHz, di bassa entità), apparati medico-diagnostici.
- **Esposizione residenziale:** elettrodomotti (origine di campi permanenti di parecchi Vm^{-1}), elettrodomestici (con campi dell'ordine di 100 Vm^{-1}).

B.1.2.2 Effetti di campo elettromagnetico su esseri viventi

La *risposta biologica* e gli effetti derivanti da esposizione al campo elettromagnetico dipendono dall'intensità delle correnti e dei campi che vengono indotti all'interno del corpo e dalla densità di potenza che viene dissipata. Il problema della valutazione quantitativa di tali effetti non è banale, e ad oggi ancora oggetto di dibattito, in quanto:

- i corpi sono disomogenei e complessi;
- le misure di campo nel corpo devono avvenire in punti spesso non accessibili;
- i meccanismi di interazione campo-organismo sono regolati da complicati processi biofisici e biochimici a livello cellulare o di organo;

- i sintomi prodotti da esposizione a campi elettromagnetici sono spesso soggettivi e concomitanti.

La risposta biologica di un **organismo di conducibilità** σ_{org} , densità ρ_{org} e permeabilità μ_0 ad un'onda piana con campo elettrico monocromatico a pulsazione ω di valore efficace (o quadratico medio) del campo elettrico E_{eff} viene quantificata attraverso due importanti parametri:

- **profondità di penetrazione** δ_s (in inglese, *skin penetration depth*) introdotta nel par. 1.4 come distanza alla quale il campo elettrico nell'organismo si riduce al valore 1/e ed espressa in questo contesto da:

$$[B.1.3] \quad \delta_s \equiv \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma_{org}}} \text{ [m]}$$

- il **tasso di assorbimento specifico** (in inglese, SAR o *Specific Absorption Rate*) definito come potenza assorbita per unità di massa dell'organismo, espresso da:

$$[B.1.4] \quad SAR \equiv \frac{\sigma_{org} (E_{eff})^2}{\rho_{org}} \text{ [W / kg]}$$

Si noti che il numeratore del SAR è la densità volumetrica di potenza dissipata per conducibilità del mezzo (ovvero, dal teorema di Poynting: $J_{eff} E_{eff} = \sigma E_{eff}^2$) e il pedice “*eff*” sta ad indicare valori efficaci del campo armonico nel tempo (ovvero valori quadratici medi in un periodo: si ricordi che $E_{eff} = E_{max}/\sqrt{2}$ dove E_{max} è il valore massimo del campo elettrico). In figura B.1.7 si riporta l'andamento qualitativo con la frequenza della profondità di penetrazione per sangue e muscolo (scala a destra) e per grasso (scala a sinistra).

La valutazione del SAR nell'interazione onda-organismo è importante per almeno due motivi:

- identificare eventuali **aree di surriscaldamento** (in inglese, *hot spot*), causate dall'azione focalizzante di materiali ad alta costante dielettrica (il cranio umano tra 900 e 2.5 MHz e il globo oculare intorno a 1500 MHz sono due esempi di tali zone). In tal caso, l'incremento di temperatura ΔT nell'unità di tempo Δt può essere collegato al SAR mediante la seguente equazione:

$$[B.1.5] \quad SAR \equiv \frac{\sigma_{org} (E_{eff})^2}{\rho_{org}} = 4185 c_{Torg} \frac{T}{t}$$

dove 4185 J/Kcal è l'equivalente meccanico del calore e c_{Torg} è il calore specifico dell'organismo in kcal/kg°C.

- identificare gli effetti di **scalamento delle dimensioni**, in quanto la dimensione e orientamento del corpo risultano significativi nel determinare il SAR ad una data frequenza. Per esempio, prove sperimentali mostrano che a 700 MHz e per una densità di potenza incidente di 1 mW/cm², il SAR medio

per un topo ha un massimo pari a 0.8 W/kg, mentre sull'uomo è circa 0.03 W/kg. A 70 MHz, invece, il SAR medio è pari a 0.25 W/kg per l'uomo e 0.0125 W/kg per il topo. Si noti che una statura umana di 1.75 m equivale circa a 0.4λ (con λ lunghezza d'onda) a 70 MHz nel vuoto, ovvero il corpo si trova approssimativamente nella condizione di un dipolo risonante a semionda.

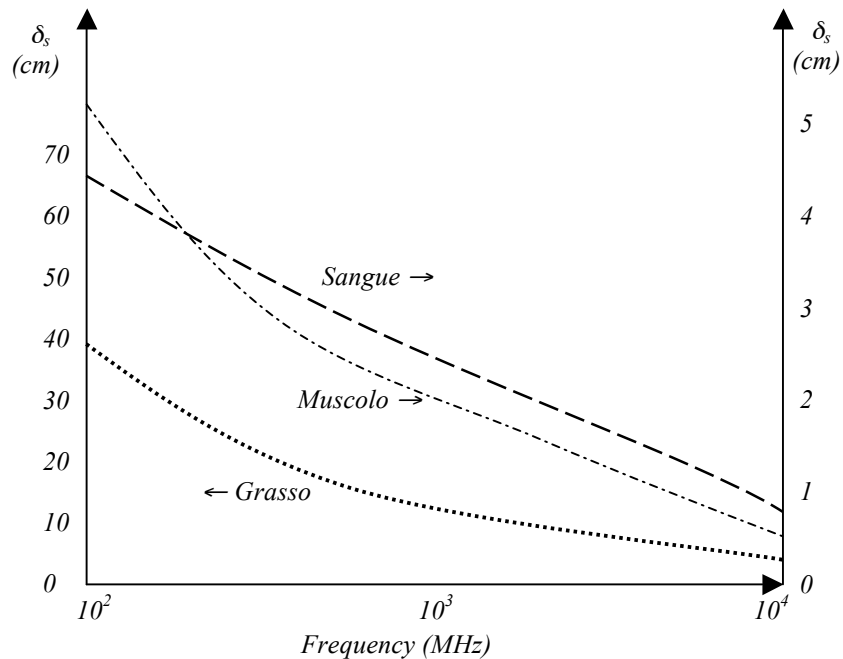


FIGURA B.1.7. Profondità di penetrazione in funzione della frequenza in alcuni mezzi biologici (sangue e muscolo con scala a destra, grasso con scala a sinistra).

Gli *effetti biologici dei campi elettromagnetici* si suole dividerli in effetti di carattere microscopico e macroscopico a livello organico e in effetti comportamentali ed epidemiologici a livello relazionale. Schematicamente, si ha:

- **Effetti microscopici a livello cellulare.** La cellula è l'unità di base del vivente ed è costituita da una membrana plasmatica che racchiude citoplasma e nucleo. I meccanismi di interazione campo-cellula coinvolgono la formazione di enzimi, la sintesi degli acidi nucleici e possibili alterazioni del sistema nervoso ed endocrino. Le sperimentazioni sembrano indicare che campi alternati tra 9 e 16 Hz producono gli effetti più vistosi. Questi risultati sono ancora oggetto di valutazioni sistematiche.
- **Effetti macroscopici a livello di organo.** L'effetto più diretto della dissipazione di potenza nei tessuti biologici è l'aumento della temperatura corporea. A tale aumento si oppone il sistema di termoregolazione, che diminuisce la produzione metabolica di calore, induce vaso-dilatazione e aumenta la sudorazione. **Effetti termici** apprezzabili si hanno solo per esposizioni prolungate e, date le profondità di penetrazione (a 2.45 GHz la

profondità su un tessuto muscolare è circa 0.5 cm, mentre a 433 MHz è 1.5 cm e a 10 MHz è 10 cm), gli organi interni sono interessati solo per frequenze inferiori a 100 MHz.

- **Effetti comportamentali.** Le alterazioni del comportamento, quali perturbazioni motorie e diminuzione dell'attività e dell'alimentazione, sono state osservate in laboratorio. Altri effetti possono essere cefalee, disturbi del sonno e bradi o tachicardia. Le rilevazioni sono, in generale, discordi fino ad oggi.
- **Effetti epidemiologici.** Alcune correlazioni statistiche sono state riportate tra esposizione a campi elettromagnetici e malattie cardiache, cataratta, leucemie e carcinogenesi. Tuttavia, le indagini riportate in letteratura non sono concordi sull'interpretazione dei risultati.

B.1.2.3 Regolamentazione dell'impatto ambientale di campi e.m.

In materia di impatto ambientale dei campi elettromagnetici (o impropriamente detto "*inquinamento elettromagnetico*"), le direttive più rilevanti risalgono in Italia al **Decreto legislativo (DLgs) n. 381 del 10 settembre del 1998**, emanato dal Ministero dell'Ambiente, in intesa con i Ministeri della Sanità e delle Comunicazioni. Al DLgs n. 381/98 è seguita la **Legge n. 36 del febbraio 2001** e successivi decreti legislativi (DLgs 257/07 e DLgs 81/08), finalizzati alla tutela dell'ambiente e del paesaggio ed a regolamentare le azioni di risanamento volte a minimizzare l'intensità e gli effetti dei campi elettromagnetici. Nell'ambito delle campagne di monitoraggio, le misure in ambiente urbano sono usualmente eseguite secondo i dettami del documento ministeriale "**Linee guida applicative**".

Le linee guida definiscono il **campo di applicazione**, che è limitato all'esposizione della popolazione ai campi elettromagnetici connessi al funzionamento ed all'esercizio dei sistemi fissi di telecomunicazione e radiotelevisivi operanti nell'intervallo di frequenza compreso tra 100 kHz e 300 GHz. Vengono così regolamentati gli impianti fissi per la telefonia mobile (quali le Stazioni Radio Base), quelli per la generazione e trasmissione dei segnali radio e televisivi, inclusi i ponti radio, gli impianti di comunicazione satellitare, gli impianti fissi utilizzati dai radioamatori, ecc., con esclusione, quindi, dei sistemi mobili quali, ad esempio, i telefoni cellulari e tutte le altre apparecchiature (fisse o mobili) che utilizzano radiazione elettromagnetica nell'intervallo di frequenza considerato, ma che non operano nel settore delle telecomunicazioni o delle trasmissioni radiotelevisive, quali ad esempio i radar. Inoltre, è precisato che i limiti di esposizione indicati non si applicano ai lavoratori professionalmente esposti, che devono essere a conoscenza dei rischi legati all'esposizione ai campi elettromagnetici e sono periodicamente sottoposti a controlli sanitari.

Le linee guida fissano anche i **limiti di esposizione al campo elettromagnetico** presente in ambiente libero. Tali limiti sono definiti per il campo elettrico, il campo magnetico e la densità di potenza, in base alla frequenza della radiazione considerata e sono riassunti nella tabella seguente. Nella zona di **campo lontano**, dove le intensità quadratiche medie (in inglese, *root mean square* o *rms*), dette anche efficaci, di campo elettrico E (espressa in V/m), magnetico H (espressa in A/m) e la densità di potenza P (espressa in W/m²) sono correlate in ogni punto

dello spazio tramite le relazioni valide nel vuoto di impedenza caratteristica $\eta_0=377 \Omega$:

$$[B.1.6] \quad E_{eff} = \eta_0 H_{eff} \Rightarrow P_{eff} = (E_{eff})^2 / 377 = 377 (H_{eff})^2$$

La verifica del rispetto del valore limite per una qualsiasi delle tre grandezze è sufficiente ad assicurare il rispetto dei limiti di esposizione. Tali relazioni si riferiscono, evidentemente, alle ipotesi di onda elettromagnetica irradiata localmente piana e uniforme nel vuoto. Nella regione di campo vicino è necessario verificare il rispetto contemporaneo dei limiti di esposizione al campo elettrico ed a quello magnetico.

Per quanto riguarda le **misure dei livelli del campo elettrico, magnetico e della densità di potenza**, le linee guida indicano che devono essere mediate spazialmente e su un intervallo temporale di sei minuti. Si richiede che vengano effettuate più misure nel punto d'indagine, almeno due corrispondenti alla testa e al tronco, quindi ad una altezza di 1,80 m e 1,10 m. Ognuna di queste dovrà essere a sua volta il risultato della media temporale su sei minuti. Se la differenza tra le due misure è maggiore del 25% del valore più elevato tra le due, è opportuno effettuarne una terza a 1,50 m da terra, per poi effettuare una media dei tre risultati. Il punto di indagine viene individuato attraverso una prima serie di misure nell'area in esame al fine di rilevare il punto di massima esposizione. Tutte le medie sopra riportate devono essere considerate come medie aritmetiche sulla densità di potenza, ovvero come medie quadratiche delle intensità del campo elettrico o magnetico.

In base a **considerazioni protezionistiche** sono state adottate misure più restrittive, al fine di tutelare eventuali recettori sensibili (non esposti per ragioni professionali) da possibili effetti a lungo termine, conseguenti ad esposizione prolungata a bassi livelli di campo. Inoltre, al fine di evitare le cosiddette “**esposizioni indebite**”, rispetto alla qualità del servizio che si vuole assicurare, viene prescritto che la progettazione e la realizzazione dei nuovi apparati, nonché l'adeguamento di quelli preesistenti, deve avvenire in maniera da minimizzare l'esposizione della popolazione al campo elettromagnetico. Per tali motivi, “in corrispondenza di luoghi residenziali, definiti quali “**edifici adibiti a permanenze non inferiori a quattro ore**”, i limiti indicati all'articolo 3 della Legge n. 36 sono stati ulteriormente ridotti: indipendentemente dalla frequenza, a $6 V/m$ per il campo elettrico e a $0,016 A/m$ per il campo magnetico. Per edifici adibiti a permanenze non inferiori a quattro ore si intendono le aree interne di edifici (quali ad esempio abitazioni, sedi di attività lavorative, scuole, ospedali, ambienti destinati all'infanzia) e loro pertinenze esterne, qualora sia ragionevole pensare che vi possa essere permanenza prolungata nel tempo (cioè maggiore a quattro ore nell'arco della giornata) e comunque ricorrente. Ai fini delle verifiche dei valori di cautela sono pertanto da considerare ad esempio anche aree esterne quali: balconi, terrazzi, giardini e cortili.

I **valori limite di campo e.m.**, imposti dai criteri attuali, sono riassunti nella tabella B.1.1. La definizione di un *valore di $6 V/m$* deriva dalla scelta di applicare un ulteriore fattore 10 di riduzione alla densità di potenza, considerata l'assenza di dati sperimentali sufficienti. Si passa così da un valore di $1 W/m^2$, corrispondente a circa

20 V/m per il valore limite del campo elettrico nel caso di onda piana equivalente, a 0,1 W/m², corrispondenti invece a 6 V/m. Tale valore risulta superiore al **livello ambientale** rilevabile attualmente in una grande città dove sono presenti numerosi impianti, tipicamente compreso tra 0,1 e 2 V/m.

Frequenza f (MHz)	Valore efficace di intensità di campo elettrico E (V/m)	Valore efficace di intensità di campo magnetico H (A/m)	Densità di potenza dell'onda piana equivalente (W/m ²)
0,1 - 3	60	0,2	Non applicabile
3 - 3.000	20	0,05	1
3.000 - 300.000	40	0,1	4
0,1- 300.000 (luoghi residenziali)	6	0,016	0.096

TABELLA B.1.1. Valori limite efficaci per i livelli di campo elettrico, magnetico e densità di potenza in funzione della banda di frequenza e tipologia di esposizione.

B.1.2.4 Sensori di misura del campo elettromagnetico

I sensori utilizzati nelle misure sono, in genere, **sonde isotropiche a banda larga**. Per consentire alla sonda di lavorare su un ampio intervallo di frequenze si fa uso dei diodi o dei transistor ad effetto di campo (in inglese, *Field Effect Transistor* o FET), che caricano un'antenna a dipolo corto (si veda il Cap. 3) per la misura del campo elettrico o una spira per la misura di campo magnetico. Questo tipo di antenne così strutturate sono caratterizzate da una banda passante che va da 100 kHz a 3 GHz e da una risposta in frequenza non distorcente.

Le antenne a dipolo con diodo Schottky sono utilizzate quando non si è interessati a misurare l'andamento temporale del campo elettrico, ma solo a misurare il suo valore efficace. In questo tipo di applicazioni il diodo svolge la tipica funzione di rivelatore. Il livello della **componente in continua** del segnale rivelato è proporzionale alla tensione ai capi del diodo, in particolare la proporzionalità è data dalla seguente espressione:

$$[B.1.7] \quad V_0 = c_v V_a^2$$

dove c_v è una costante strumentale e V_a è la tensione a vuoto del bipolo attivo dell'antenna e pari, come visto nel Cap. 1 e 3, a:

$$[B.1.8] \quad V_a = h_M E_i$$

con h_M lunghezza elettrica equivalente massima e E_i campo elettrico incidente (come noto, la precedente relazione è valida nel caso di efficienza di polarizzazione unitaria e accoppiamento massimo tra dipolo e campo incidente). Il segnale in uscita dal diodo viene inviato ai circuiti utilizzatori per mezzo di **linee ad alta impedenza** per ridurre le correnti indotte dal campo magnetico; talvolta, per questo stesso scopo, si utilizzano delle linee in fibra ottica. Per garantire l'isotropia del sensore si utilizzano **tre dipoli disposti perpendicolarmente** fra loro, secondo i tre assi

cartesiani X , Y , Z , ognuno dei quali presenta il proprio diodo al centro della struttura. Dalle equazioni precedenti si può ricavare la tensione in continua presente su ogni diodo:

$$[B.1.9] \quad V_{0i} = c_{vi} h_M^2 E_i^2,$$

con $i = 1, 2, 3$. Questo segnale viene, quindi, inviato ad un sommatore, la cui uscita sarà (supponendo $c_{v1}=c_{v2}=c_{v3}=c_v$):

$$[B.1.10] \quad V_0 = V_{01} + V_{02} + V_{03} = c_v (V_1^2 + V_2^2 + V_3^2) = c_v h_M^2 (E_1^2 + E_2^2 + E_3^2) = c_v h_M^2 |E|^2.$$

Dalla precedente equazione si deduce il comportamento isotropico del sensore, cioè la misura effettuata risulta indipendente dalla orientazione della sonda. È importante che i tre dipoli abbiano centro elettrico coincidente, al fine di evitare fenomeni di riflessione. Il segnale rivelato viene inviato ad un utilizzatore che provvede, per mezzo di un opportuno software, alla successiva visualizzazione sia del valore del campo elettromagnetico totale, sia del valore del campo elettromagnetico relativo ai singoli assi.

Un esempio di **sonda portatile triassale di campo elettrico** è mostrato in figura B.1.8, dove si nota la protezione dielettrica a forma di cupola a protezione dei dipoli e dei rivelatori. In figura B.1.9 è illustrata l'interno di una **centralina di misura di campi e.m.** Tali sonde si caratterizzano per la banda (tipicamente tra 100 kHz e 3 GHz), la dinamica del campo elettrico e/o magnetico misurato (o portata, tipicamente tra 0.3 e 300 V/m), la dinamica del segnale in uscita (tipicamente > 60 dB), la risoluzione (tipicamente < 0.01 V/m), la sensibilità (tipicamente < 0.5 V/m), la isotropicità (tipicamente ± 1 dB) e la reiezione ai campi magnetici (tipicamente > 20 dB).

Per la **misura di campi elettrici e magnetici a bassa frequenza** si utilizzano sonde triassiali, costituite da spire di corrente, ma con banda diversa (tipicamente tra 5 Hz e 100 kHz), portata definita anche per il campo magnetico (tipicamente tra 10 nT e 10 mT, dove T sta per Tesla), oltre che per il campo elettrico (tipicamente tra 0.1 V/m e 100 kV/m), ampia dinamica (> 100 dB) e buona risoluzione (tipicamente, < 5 nT e < 0.5 V/m) e sensibilità (tipicamente < 20 nT e < 0.5 V/m).



FIGURA B.1.8 Esempio di sonda isotropica triassiale a larga banda per la misura di campo elettrico.

In generale, durante una **campagna investigativa di misura** sarebbe opportuno disporre di stazioni di misura capaci almeno di distinguere tra frequenze corrispondenti ad impianti radio (frequenze nell'intervallo $85\div 110$ MHz), ad impianti TV (frequenze nel range $160\div 800$) e ad impianti di telefonia mobile (frequenze nell'intervallo $900\div 1800\div 2100$). A tale scopo si utilizzano **sistemi di misura a banda stretta** costituiti da antenne log-periodiche o a tromba accoppiate con analizzatori di spettro. Resta, comunque, da sottolineare l'utilità delle misure in continuo a banda larga che forniscono informazioni integrate spettralmente, ma comunque molto utili ad una prima valutazione dell'impatto ambientale.

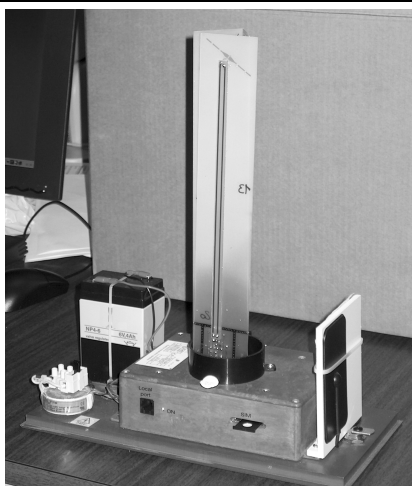


FIGURA B.1.9 Interno di una centralina di acquisizione di campi e.m.

B.2 Complementi di Radiazione elettromagnetica

Gli argomenti trattati nell'Appendice B.2 riguardano:

- richiami schematici di teoria dei campi elettromagnetici, utili per poter affrontare lo studio del capitolo 2;
- cenni sulla teoria della diffusione e.m., di interesse per l'analisi dell'interazione tra radiazione e.m. e corpi artificiali o naturali in applicazioni quali la progettazione di antenne o i sistemi di telerilevamento;
- elementi di ottica geometrica, premessa teorica all'analisi delle proprietà di antenne a riflettore e alla propagazione in mezzi disomogenei.

B.2.1 Richiami di campi elettromagnetici

Prima di esporre la teoria della radiazione elettromagnetica, è opportuno fare dei **richiami di elettromagnetismo** che ci consentiranno di esporre in modo più consapevole alcune deduzioni e passaggi fondamentali. Tra questi richiami, ci soffermeremo sui teoremi fondamentali, sulla teoria dei potenziali elettrodinamici e sulle onde piane, concludendo con alcuni cenni di meccanica quantistica.

B.2.1.1 Teorema di unicità

I problemi elettromagnetici si dividono in: i) **problemi interni**, se riferiti a volumi chiusi; ii) **problemi esterni**, se riferiti a volumi aperti con limiti all'infinito. Enunciamo il teorema nel dominio della frequenza (riferendoci a capi e.m. monocromatici rappresentati dal corrispondente vettore complesso: si veda Appendice A) nei due casi.

Problemi interni. Condizione sufficiente a che la soluzione sia unica all'interno di un volume V , delimitato da una superficie chiusa S e riempito da un mezzo dissipativo sede di sorgenti impresse, è che siano assegnate su S le componenti tangenziali dei campi (si veda figura B.2.1):

$$[B.2.1] \quad \underline{n}_0 \times \underline{E}(\underline{r}) \quad \text{oppure} \quad \underline{n}_0 \times \underline{H}(\underline{r}) \quad \text{su } S$$

dove \underline{n}_0 è la normale uscente a S . Oppure, se $S = S' \cup S''$, l'unicità della soluzione sussiste se sono assegnate:

$$[B.2.2] \quad \underline{n}_0 \times \underline{E}(\underline{r}) \quad \text{su } S' \quad \text{insieme a} \quad \underline{n}_0 \times \underline{H}(\underline{r}) \quad \text{su } S''$$

o viceversa.

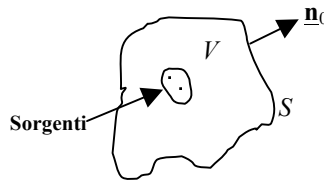


FIGURA B.2.1 Problemi interni in elettromagnetismo.

Problemi esterni. Siano assegnate le sorgenti impresse in un volume V **illimitato**, ovvero delimitato dalla superficie interna S e dalla superficie all'infinito. La condizione sufficiente per la unicità della soluzione in V è che siano assegnate le condizioni al contorno su S (si veda figura B.2.2):

$$[B.2.3] \quad \underline{\mathbf{n}}_0 \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) \quad oppure \quad \underline{\mathbf{n}}_0 \times \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}}) \quad \text{su } S$$

oppure, se $S = S' \cup S''$

$$[B.2.4] \quad \underline{\mathbf{n}}_0 \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) \quad \text{su } S' \quad oppure \quad \underline{\mathbf{n}}_0 \times \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}}) \quad \text{su } S''$$

e che, inoltre, sia soddisfatta la **condizione di radiazione all'infinito** (sulla sfera all'infinito $S \rightarrow \infty$), anche detta **condizione di Sommerfeld**. Per i moduli dei campi, ciò si traduce in:

$$[B.2.5] \quad \lim_{r \rightarrow \infty} [r |\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}})|] = l \quad e \quad \lim_{r \rightarrow \infty} [r |\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}})|] = l \quad \text{su } S \rightarrow \infty$$

dove l è una quantità reale positiva limitata, mentre vettorialmente vale:

$$[B.2.6] \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left[\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}}) - \left(\frac{1}{\eta} \underline{\mathbf{n}}_0 \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) \right) \right] = 0$$

Le precedenti relazioni affermano sostanzialmente che sulla sfera all'infinito in condizioni di spazio libero il campo lontano dalle sorgenti deve

- decrescere in modulo come $1/r$;
- deve avere caratteristiche localmente di un'onda piana trasversa-elettromagnetica (TEM) rispetto alla direzione radiale.

Osservazione B.2.1.1

Si noti che la componente tangenziale di un vettore $\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}})$ non è a rigore $\underline{\mathbf{n}}_0 \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}})$. Infatti, scomposto $\underline{\mathbf{n}}_0 \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}})$ in componente trasversa $\underline{\mathbf{E}}_t$ e componente normale $\underline{\mathbf{E}}_n = E_n \underline{\mathbf{n}}_0$ (parallela a $\underline{\mathbf{n}}_0$) tale che:

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_t + \underline{\mathbf{E}}_n = \underline{\mathbf{E}}_t + E_n \underline{\mathbf{n}}_0$$

si ottiene:

$$- [\underline{\mathbf{n}}_0 \times \underline{\mathbf{n}}_0 \times \underline{\mathbf{E}}] = - [\underline{\mathbf{n}}_0 (\underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{n}}_0) - \underline{\mathbf{E}} (\underline{\mathbf{n}}_0 \cdot \underline{\mathbf{n}}_0)] = - [\underline{\mathbf{n}}_0 E_n - \underline{\mathbf{E}}] = \underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{E}}_n = \underline{\mathbf{E}}_t$$

Per cui a rigore la componente tangenziale (ovvero traversa a $\underline{\mathbf{n}}_0$) di un campo è pari a:

$$[B.2.7] \quad \underline{\mathbf{E}}_t = \underline{\mathbf{n}}_0 \times \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{n}}_0$$

Infine, nel caso in cui i mezzi siano idealmente **non dissipativi** (ovvero, privi di perdite ohmiche e dielettriche), si dimostra che nel dominio della frequenza la soluzione del problema e.m. non è unica in quanto possono esistere “auto-soluzioni” corrispondenti

a condizioni di risonanza (oscillazioni libere per problemi interni) del campo per particolari valori di frequenza.

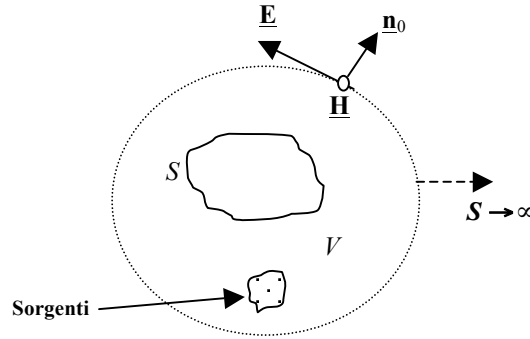


FIGURA B.2.2 Problemi esterni in elettromagnetismo.

B.2.1.2 Teorema di dualità

Come già accennato nel Cap. 2, l'introduzione del termine di sorgente magnetica impressa \underline{J}_{mi} ha reso le due equazioni di Maxwell simmetriche. Ciò costituisce un enorme vantaggio in quanto è possibile risolvere il problema elettromagnetico nel caso “elettrico” (ovvero quello si imprinono le sole correnti elettriche) e, formalmente, riscrivere la soluzione per il caso “magnetico” (ovvero quello per cui si imprinono le sole correnti magnetiche). Tale proprietà è nota con il nome di teorema o, erroneamente, principio di *dualità*.

La sua dimostrazione è immediata. Consideriamo il **caso elettrico**, ove si tenga conto delle sole sorgenti elettriche imprresse. È possibile riscrivere le equazioni di Maxwell (per brevità, non si esplicita la dipendenza da \underline{r}) nel dominio della frequenza come segue:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \underline{E} &= -j\omega\mu\underline{H} \\
 \nabla \times \underline{H} &= j\omega\varepsilon_c \underline{E} + \underline{J}_i \quad (\text{caso elettrico}) \\
 \nabla \cdot [\underline{J}(\underline{r}) + \underline{J}_i(\underline{r})] &= -j\omega[\rho(\underline{r}) + \rho_i(\underline{r})]
 \end{aligned}
 \tag{B.2.8}$$

È possibile ottenere le equazioni di Maxwell nel **caso magnetico**, ove si tenga conto delle sole sorgenti magnetiche imprresse:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \underline{E} &= -j\omega\mu\underline{H} - \underline{J}_{mi} \\
 \nabla \times \underline{H} &= j\omega\varepsilon_c \underline{E} \quad (\text{caso magnetico}) \\
 \nabla \cdot [\underline{J}_m(\underline{r}) + \underline{J}_{mi}(\underline{r})] &= -j\omega[\rho_m(\underline{r}) + \rho_{mi}(\underline{r})]
 \end{aligned}
 \tag{B.2.1.9}$$

utilizzando la trasformazione di dualità espressa dalla tabella B.2.1 seguente:

Caso elettrico		Caso magnetico
$\underline{\mathbf{E}}$	\leftrightarrow	$\underline{\mathbf{H}}$
$\underline{\mathbf{H}}$	\leftrightarrow	$-\underline{\mathbf{E}}$
$\underline{\mathbf{J}}_{mi}$	\leftrightarrow	$-\underline{\mathbf{J}}_i$
$\underline{\mathbf{J}}_i$	\leftrightarrow	$\underline{\mathbf{J}}_{mi}$
ρ_i	\leftrightarrow	ρ_{mi}
ρ	\leftrightarrow	ρ_m
ρ_{mi}	\leftrightarrow	$-\rho_i$
ρ_m	\leftrightarrow	$-\rho$
ϵ_c	\leftrightarrow	μ
μ	\leftrightarrow	ϵ_c
$\underline{\mathbf{A}}_m$	\leftrightarrow	$-\underline{\mathbf{A}}$
$\underline{\mathbf{A}}$	\leftrightarrow	$\underline{\mathbf{A}}_m$

TABELLA B.2.1. Trasformazione di dualità tra caso elettrico e caso magnetico.

Utilizzando la trasformazione di dualità, quindi, si verifica che la I equazioni di Maxwell è duale della II equazione e viceversa; analogamente, ciò vale anche per le equazione di continuità della densità di corrente.

Per i potenziali elettrodinamici (vedi paragrafo seguente B.2.1.5) vale: $\underline{\mathbf{A}} \rightarrow \underline{\mathbf{A}}_m$, $\underline{\mathbf{A}}_m \rightarrow -\underline{\mathbf{A}}$, ove $\underline{\mathbf{A}}$ è il potenziale elettrico e $\underline{\mathbf{A}}_m$ quello magnetico. Si noti che, come conseguenza, η diventa $1/\eta$, mentre k rimane k nel caso duale.

B.2.1.3 Condizioni al contorno

Molto spesso ci si imbatte nella soluzione di **problemi in mezzi disomogenei**. Un modo di procedere è di risolvere le equazioni di Maxwell a coefficienti non costanti, problema non sempre di facile soluzione. In modo alternativo, si può suddividere il problema in sotto-volumi a mezzo omogeneo, calcolare la soluzione e “raccordare” tali soluzioni parziali attraverso le cosiddette *condizioni al contorno*.

Quest’ultime si deducono dalle equazioni di Maxwell considerando un volume all’interfaccia tra i 2 mezzi, utilizzando il teorema di Gauss sulla divergenza e di Stokes sul rotore e riducendo lo spessore di tale volume al limite nullo (si consultino testi di Campi elettromagnetici). Si dimostra che all’interfaccia tra 2 mezzi, la **discontinuità delle componenti tangenziali e normali** dei campi è pari a (figura B.2.3) nel dominio della frequenza:

$$[B.2.10] \quad \begin{aligned} \underline{n}_0 \times (\underline{H}_2 - \underline{H}_1) &= \underline{K} & \underline{n}_0 \times (\underline{E}_2 - \underline{E}_1) &= -\underline{K}_m \\ \underline{n}_0 \cdot (\underline{D}_2 - \underline{D}_1) &= \rho_s & \underline{n}_0 \cdot (\underline{B}_2 - \underline{B}_1) &= \rho_{ms} \end{aligned} \quad \text{su } S$$

dove \underline{n}_0 è la normale uscente alla superficie di separazione S diretta verso il mezzo 2 e i pedici si riferiscono al mezzo di appartenenza. Si definiscono le seguenti grandezze sulla superficie S :

- \underline{K} : *densità lineare di corrente* elettrica [A/m] o densità di *corrente elettrica superficiale*, anche indicata in letteratura da \underline{J}_s ;
- \underline{K}_m : densità lineare di corrente magnetica [V/m] o densità di corrente magnetica superficiale, anche indicata in letteratura da \underline{J}_{ms} ;
- ρ_s : *densità superficiale di carica* elettrica [C/m²];
- ρ_{ms} : densità superficiale di carica magnetica [Wb/m²].

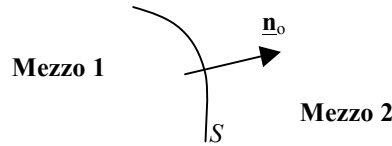


FIGURA B.2.3 Interfaccia tra 2 mezzi.

Esistono alcuni casi particolari notevoli:

1. Se il mezzo 1 è un *conduttore elettrico perfetto (CEP)*, ovvero idealmente un mezzo metallico a conducibilità infinita (ove $\underline{E}_1 = \underline{H}_1 = 0$) con normale \underline{n}_0 uscente dal conduttore, le condizioni al contorno diventano:

$$[B.2.11] \quad \begin{aligned} \underline{n}_0 \times \underline{H}_2 &= \underline{J}_s \equiv \underline{K} & \underline{n}_0 \times \underline{E}_2 &= \underline{J}_{ms} \equiv -\underline{K}_m \\ \underline{n}_0 \cdot \underline{D}_2 &= \rho_s & \underline{n}_0 \cdot \underline{B}_2 &= \rho_{ms} \end{aligned} \quad \text{su CEP}$$

ovvero, fisicamente essendo $\underline{K}_m=0$, $\rho_{ms}=0$:

$$[B.2.12] \quad \begin{aligned} \underline{n}_0 \times \underline{H}_2 &= \underline{K} & \underline{n}_0 \times \underline{E}_2 &= 0 \\ \underline{n}_0 \cdot \underline{D}_2 &= \rho_s & \underline{n}_0 \cdot \underline{B}_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{su CEP}$$

Le equazioni precedenti affermano che:

- le componenti tangenziali del campo elettrico **si annullano** ovvero il campo \underline{E} è tutto normale;
- le componenti tangenziali del campo magnetico sono **non nulle** e pari alle correnti superficiali \underline{K} .

2. Se il mezzo 1 è un **conduttore magnetico perfetto (CMP)**, ovvero idealmente un mezzo a permeabilità magnetica infinita (ove $\underline{E}_1 = \underline{H}_1 = 0$), per dualità le condizioni al contorno diventano (in un CMP idealmente esistono cariche e correnti magnetiche mentre sono nulle quelle elettriche):

$$[B.2.13] \quad \begin{aligned} \underline{n}_0 \times \underline{E}_2 &= -\underline{K}_m & \underline{n}_0 \times \underline{H}_2 &= -\underline{K} = 0 \\ \underline{n}_0 \cdot \underline{B}_2 &= -\rho_{ms} & \underline{n}_0 \cdot \underline{D}_2 &= -\rho_s = 0 \end{aligned} \quad \text{su CMP}$$

3. Se i mezzi 1 e 2 sono **dielettrici perfetti (DEP)**, ovvero idealmente mezzi privi di dissipazioni per conduzione, le condizioni al contorno diventano:

$$[B.2.14] \quad \begin{aligned} \underline{n}_0 \times (\underline{H}_2 - \underline{H}_1) &= 0 & \underline{n}_0 \times (\underline{E}_2 - \underline{E}_1) &= 0 \\ \underline{n}_0 \cdot (\underline{D}_2 - \underline{D}_1) &= 0 & \underline{n}_0 \cdot (\underline{B}_2 - \underline{B}_1) &= 0 \end{aligned} \quad \text{su DEP}$$

4. Se il mezzo 1 è un **buon conduttore elettrico (BCE)**, ovvero un mezzo a conducibilità finita tale che $\sigma_1 \gg \omega \epsilon_1$, vale la **condizione al contorno di Leontovich** (condizione di impedenza superficiale):

$$[B.2.15] \quad \underline{n}_0 \times \underline{E}_2 = Z_s \underline{H}_2 \quad \text{su BCE}$$

dove Z_s è l'impedenza superficiale espressa attraverso la profondità di penetrazione δ_s :

$$[B.2.16] \quad Z_s = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_{c1}}} \cong \sqrt{\frac{\mu}{-j\sigma_1/\omega}} = \sqrt{j \frac{\omega \mu_1}{\sigma_1}} = \frac{1+j}{\sigma_1} \sqrt{\frac{\omega \mu_1 \sigma_1}{2}} = \frac{1+j}{\sigma_1 \delta_s} \quad [\Omega]$$

Osservazione B.2.1.2

La parete CEP impone che la componente tangenziale di \underline{E} sia nulla e rappresenta una **condizione ideale di corto-circuito**, con differenza di potenziale nulla tra due punti della superficie (in quanto la differenza di potenziale è l'integrale di linea del campo elettrico la cui componente lungo la superficie è nulla) e corrente elettrica diversa da zero.

La parete CMP impone che la componente tangenziale di \underline{H} sia nulla e rappresenta una **condizione ideale di circuito aperto**, caratterizzato, per dualità, da corrente elettrica nulla e differenza di potenziale tra due punti della superficie diversa da zero.

La condizione di Leontovich corrisponde a imporre una relazione di **onda piana uniforme attenuata** alla superficie di interfaccia, caratterizzata da un'attenuazione α espressa tramite la profondità di penetrazione δ_s nel mezzo BCE (si veda l'effetto *pelle* nel Cap. 1) e da una direzione ortogonale rispetto al piano di interfaccia.

B.2.1.4 Teorema di Poynting

In elettromagnetismo è possibile esprimere la **conservazione dell'energia elettromagnetica** attraverso le equazioni di Maxwell nel mezzo. Tale espressione prende il nome di **teorema di Poynting**¹ (si consulti un testo di Campi elettromagnetici per i dettagli e la sua dimostrazione).

All'interno di un volume V racchiuso da una superficie S (con normale \underline{n}_0 uscente) in cui siano contenute le sorgenti impresse in mezzo lineare, isotropo, omogeneo, non dispersivo e dissipativo, si dimostra che il bilancio energetico, in termini di potenza, si esprime nel dominio della frequenza tramite:

$$[B.2.17] \quad \oint_S \underline{P} \cdot \underline{n}_0 d^2 \underline{r}' + 2j\omega \int_V (w_m - w_e) d^3 \underline{r}' + \int_V p_e d^3 \underline{r}' = \int_V (p_{ei} + p_{mi}) d^3 \underline{r}'$$

dove $\underline{P} = \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^*$ è il **vettore di Poynting** [W/m²], ovvero densità di potenza irradiata attraverso S , $w_m = \frac{1}{4} \mu \underline{H} \cdot \underline{H}^* = \frac{1}{4} \mu |\underline{H}|^2$ è la **densità di energia** magnetica [J/ m³] immagazzinata in V , $w_e = \frac{1}{4} \varepsilon \underline{E} \cdot \underline{E}^* = \frac{1}{4} \varepsilon |\underline{E}|^2$ è la densità di energia elettrica [J/ m³] immagazzinata in V , $p_e = \frac{1}{2} \sigma \underline{E} \cdot \underline{E}^* = \frac{1}{2} \sigma |\underline{E}|^2$ è la **densità di potenza** [W/ m³] **dissipata** per conduzione in V , $p_{ei} = -\frac{1}{2} \underline{E} \cdot \underline{J}^*$ è la **densità di potenza** [W/ m³] **fornita** (segno “-“) dalla sorgenti elettriche in V , $p_{mi} = -\frac{1}{2} \underline{H}^* \cdot \underline{J}_m$ è la densità di potenza [W/ m³] fornita (segno “-“) dalla sorgenti magnetiche in V .

Il teorema di Poynting afferma che il flusso della densità di potenza elettromagnetica., sommato alla energia elettrica e magnetica immagazzinata nel volume V e dissipata per effetto Ohm nello stesso volume, è pari all'energia ceduta dalle sorgenti impresse di tipo elettrico e magnetico.

Si ricordi che la **parte reale** di ciascun termine complesso dell'espressione del teorema di Poynting esprime il valore medio in un periodo del corrispondente termine istantaneo nel dominio del tempo. Inoltre, in un mezzo **dispersivo temporalmente**, la funzione densità di energia immagazzinata w non è definibile in quanto non è più una funzione di stato; tali mezzi si dicono **mezzi con isteresi**.

B.2.1.5 Potenziali elettrodinamici

Può essere conveniente risolvere le equazioni di Maxwell operando non direttamente sui campi vettoriali elettrico e magnetico, bensì su **funzioni ausiliarie** dette potenziali elettrodinamici. Ciò ha il vantaggio di poter semplificare la

¹ John E. Poynting (1852-1914), fisico inglese, autore dell'omonimo teorema pubblicato nel 1884.

soluzione delle corrispondenti equazione differenziali, ma lo svantaggio di dovere effettuare una trasformazione dei campi elettromagnetici e poi un'antitrasformazione del risultato ottenuto in termini di potenziali.

Per la sovrapposizione degli effetti, in un mezzo lineare il problema si può scomporre imprimendo separatamente le sorgenti elettriche $\underline{\mathbf{J}}_e$ e le sorgenti magnetiche $\underline{\mathbf{J}}_{mi}$.

Caso di sorgenti elettriche. Se $\underline{\mathbf{J}}_{mi}=0$, applicando la divergenza alla I equazioni di Maxwell in un mezzo isotropo e omogeneo, si ha:

$$[B.2.18] \quad \nabla \cdot \underline{\mathbf{B}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \underline{\mathbf{H}} = 0$$

Il *potenziale vettore elettrico* $\underline{\mathbf{A}}$ si definisce come:

$$[B.2.19] \quad \underline{\mathbf{H}} = \nabla \times \underline{\mathbf{A}} \quad \text{con} \quad \underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}}' + \nabla \Phi$$

ove Φ è una funzione scalare arbitraria, essendo nullo il rotore di un gradiente. Sostituendo nella I equazione di Maxwell, si ottiene la definizione del *potenziale scalare elettrico* V attraverso:

$$\nabla V = -\underline{\mathbf{E}} - j\omega\mu\underline{\mathbf{A}}$$

Se vale la **condizione di vincolo Lorenz**² (nota anche come “the Lorenz gauge”) per $\underline{\mathbf{A}}$ e V , vista l'arbitrarietà della funzione scalare Φ :

$$[B.2.20] \quad \nabla \cdot \underline{\mathbf{A}} = -j\omega\epsilon_c V,$$

allora il potenziale $\underline{\mathbf{A}}$ soddisfa la seguente equazione vettoriale di Helmholtz non omogenea:

$$[B.2.21] \quad \nabla^2 \underline{\mathbf{A}} + k^2 \underline{\mathbf{A}} = -\underline{\mathbf{J}}_e$$

Calcolato il potenziale $\underline{\mathbf{A}}$ di Lorenz dalla precedente, il campo elettromagnetico si ottiene attraverso le relazioni:

$$[B.2.22] \quad \begin{cases} \underline{\mathbf{H}} = \nabla \times \underline{\mathbf{A}} \\ \underline{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\underline{\mathbf{A}} + \frac{\nabla \nabla \cdot \underline{\mathbf{A}}}{j\omega\epsilon_c} \end{cases}$$

Caso di sorgenti magnetiche. Dualmente rispetto al caso elettrico, se $\underline{\mathbf{J}}_e=0$ e applicando la divergenza alla I equazioni di Maxwell in un mezzo isotropo e omogeneo, si ha:

² Ludvig Lorenz (1829-1891), fisico danese cui si deve anche la legge che lega l'indice di rifrazione alla densità (legge nota con il nome di Lorenz-Lorentz, essendo stata scoperta indipendentemente dal fisico danese H. Lorentz (1853-1928).

$$[B.2.23] \quad \nabla \cdot \underline{\mathbf{E}} = 0$$

Per dualità, il *potenziale vettore magnetico* $\underline{\mathbf{A}}_m$ si definisce:

$$[B.2.24] \quad \underline{\mathbf{E}} = -\nabla \times \underline{\mathbf{A}}_m \quad \text{con} \quad \underline{\mathbf{A}}_m = \underline{\mathbf{A}}_m' + \nabla \Phi_e$$

ove Φ_e è una funzione scalare arbitraria. Tale definizione è duale della precedente ($\underline{\mathbf{H}} \rightarrow -\underline{\mathbf{E}}, \underline{\mathbf{A}} \rightarrow \underline{\mathbf{A}}_m$). Il potenziale $\underline{\mathbf{A}}_m$ soddisfa la seguente equazione vettoriale di Helmholtz non omogenea:

$$[B.2.25] \quad \nabla^2 \underline{\mathbf{A}}_m + k_e^2 \underline{\mathbf{A}}_m = -\underline{\mathbf{J}}_{mi}$$

Calcolato il potenziale vettore magnetico $\underline{\mathbf{A}}_m$ di Lorenz dalla precedente, il campo elettromagnetico si ottiene attraverso:

$$[B.2.26] \quad \begin{cases} \underline{\mathbf{E}} = -\nabla \times \underline{\mathbf{A}}_m \\ \underline{\mathbf{H}} = -j\omega\epsilon_c \underline{\mathbf{A}}_m + \frac{\nabla \nabla \cdot \underline{\mathbf{A}}_m}{j\omega\mu} \end{cases}$$

Se il mezzo è lineare, il campo elettromagnetico in presenza di sorgenti sia elettriche che magnetiche si ottiene per sovrapposizione degli effetti dei campi elettromagnetici calcolati dai potenziali elettrici e magnetici.

Osservazione B.2.1.3

In mezzi disomogenei elettricamente e magneticamente non è possibile definire il potenziale magnetico ed elettrico come in precedenza, visto che $\epsilon = \epsilon(\mathbf{r})$ e $\mu = \mu(\mathbf{r})$. Tuttavia, si può ancora definire il potenziale vettore magnetico $\underline{\mathbf{A}}$ nel seguente modo:

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{B}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\mathbf{B}} = \nabla \times \underline{\mathbf{A}}$$

In tal caso l'equazione del potenziale $\underline{\mathbf{A}}$ diventa:

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{A}} + k^2 \underline{\mathbf{A}} = -\mu \underline{\mathbf{J}}_i$$

e dualmente per $\underline{\mathbf{A}}_m$.

B.2.1.6 Onde piane uniformi

Una soluzione delle **equazioni di Maxwell omogenee** (cioè, in assenza di sorgenti all'interno di un volume riempito da un mezzo lineare, omogeneo, isotropo), ovvero della corrispondente equazione associata di Helmholtz omogenea:

$$[B.2.27] \quad \nabla^2 \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + k^2 \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{con} \quad \nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = 0$$

è l'*onda piana*, il cui campo elettrico in regime monocromatico si scrive nella seguente forma:

$$[B.2.28] \quad \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = \underline{\mathbf{E}}_0 e^{-j\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{r}}} = \underline{\mathbf{E}}_0 e^{-j\underline{\beta} \cdot \underline{\mathbf{r}}} e^{-\underline{\alpha} \cdot \underline{\mathbf{r}}}$$

dove $\underline{\mathbf{k}} = \underline{\beta} - j\underline{\alpha}$ è il *vettore di propagazione*, generalmente complesso, tale che $|\underline{\mathbf{k}}|^2 = \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{k}} = k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$, $\underline{\beta}$ è il *vettore di fase* [1/m] tale che le superfici equifase sono i piani in cui $\underline{\beta} \cdot \underline{\mathbf{r}} = \text{costante}$, $\underline{\alpha}$ è il *vettore di attenuazione* [1/m] tale che le superfici equiampiezza sono i piani in cui $\underline{\alpha} \cdot \underline{\mathbf{r}} = \text{costante}$, $\underline{\mathbf{E}}_0$ è il vettore complesso [V/m] che descrive lo *stato di polarizzazione* (lineare, circolare, ellittica).

Il campo magnetico, applicando la I equazione di Maxwell, vale:

$$[B.2.29] \quad \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}}) = \frac{\underline{\mathbf{k}} \times \underline{\mathbf{E}}_0}{\omega \mu} e^{-j\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{r}}}$$

Un caso particolarmente rilevante è l'*onda piana uniforme* che si propaga in un mezzo **non dissipativo** avente $\alpha = 0$ e $\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$, ovvero l'onda del tipo:

$$[B.2.30] \quad \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = \underline{\mathbf{E}}_0 e^{-j\underline{\beta} \cdot \underline{\mathbf{r}}}$$

Specializzando l'espressione del campo nel caso di onda che si propaga lungo l'asse z ($\underline{\beta} = \beta_z \underline{\mathbf{z}}_0$), $\underline{\beta} \cdot \underline{\mathbf{r}} = \beta_z z$ e l'andamento nel tempo si ottiene moltiplicando la rappresentazione complessa per $\exp(j\omega t)$ e considerando la parte reale:

$$[B.2.31] \quad \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}, t) = \text{Re} \left[\underline{\mathbf{E}}_0 e^{-j\beta_z z} e^{j\omega t} \right] = \underline{\mathbf{E}}_0 \cos(\omega t - \beta_z z)$$

I *piani equifase* sono ortogonali all'asse z e la velocità di fase v_z dell'onda (velocità di un osservatore che rilevi fase costante) è data dalle seguenti relazioni:

$$[B.2.32] \quad \beta_z dz - \omega dt = 0 \Rightarrow v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta_z} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

Si noti come nel vuoto, essendo $\mu = \mu_0$ e $\epsilon = \epsilon_0$, tale velocità coincide con la costante $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ (velocità della luce nel vuoto). Per un mezzo non dissipativo diverso dal vuoto con $\mu = \mu_0$, risulta:

$$[B.2.33] \quad v_z = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{n} < c$$

essendo ϵ_r la costante dielettrica relativa e l'indice di rifrazione $n = \sqrt{\epsilon_r}$, entrambi maggiori dell'unità.

Se il mezzo è **dissipativo** risulta necessariamente $\underline{\alpha} \neq 0$ per cui l'onda è attenuata. Di nuovo, particolarmente rilevante è il caso di onda piana uniforme in cui l'attenuazione avviene nella stessa direzione della propagazione. Nel caso di propagazione lungo z si ottiene un andamento spazio-temporale del campo nella forma seguente:

$$[B.2.34] \quad \underline{E}(z, t) = \text{Re} \left[\underline{E}_0 e^{-j\beta_z z} e^{-\alpha_z z} e^{j\omega t} \right] = \underline{E}_0 e^{-\alpha_z z} \cos(\omega t - \beta_z z)$$

La velocità di fase vale ancora $u_z = \omega/\beta_z$. La costante di propagazione β_z e la costante di attenuazione α_z sono però legate alla costante del mezzo, ed in particolare alla costante dielettrica complessa, in modo più complicato. Ricordando la definizione dell'**indice di rifrazione** complesso $n = n' - jn'' \equiv \sqrt{\epsilon_r' - j\epsilon_r''}$, sviluppando la radice ed indicando con $k_0 = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ la costante di propagazione nel vuoto e con λ_0 la lunghezza d'onda nel vuoto, per la costante di propagazione e per la costante di attenuazione nel mezzo dissipativo, si ottengono le seguenti:

$$k = \beta - j\alpha = \omega \sqrt{\mu \epsilon_c} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sqrt{\epsilon_r} \equiv k_0 n = k_0 (n' - jn'')$$

da cui, per definizione:

$$[B.2.35] \quad \begin{cases} \beta = k_0 n' \\ \alpha = k_0 n'' \end{cases}$$

È possibile dimostrare che la parte reale e immaginaria dell'indice di rifrazione n si possono collegare alla costante dielettrica mediante le seguenti formule:

$$[B.2.36] \quad \beta = k_0 n' = \frac{2\pi}{\lambda_0} n' = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\frac{\epsilon_r' + \sqrt{\epsilon_r'^2 + \epsilon_r''^2}}{2}}$$

$$[B.2.37] \quad \alpha = k_0 n'' = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{\epsilon_r''}{2n'} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\frac{\epsilon_r''^2}{2(\epsilon_r' + \sqrt{\epsilon_r'^2 + \epsilon_r''^2})}}$$

E, quando il mezzo risulta poco dissipativo, ovvero $\epsilon_r'' \ll \epsilon_r'$, le quantità si approssimano nel modo seguente:

$$[B.2.38] \quad \beta \approx \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\epsilon_r'} \quad \text{e} \quad \alpha \approx \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{\epsilon_r''}{2\sqrt{\epsilon_r'}}$$

Dimostrazione: legame tra costanti secondarie e primarie del mezzo

La parte reale e immaginaria dell'indice di rifrazione n si possono collegare alla costante dielettrica complessa attraverso la seguente definizione:

$$n = \sqrt{\frac{\mu \epsilon_r}{\mu_0 \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0 [\epsilon_0 (\epsilon'_r - j \epsilon''_r)]}{\mu_0 \epsilon_0}} = \sqrt{(\epsilon'_r - j \epsilon''_r)} = n' - j n''$$

da cui si ottiene anche $\epsilon'_r - j \epsilon''_r = n'^2 - n''^2 - 2 j n' n''$. Eguagliando parti reali e immaginarie, si ha:

$$\begin{cases} \epsilon'_r = n'^2 - n''^2 \\ -2 j n' n'' = -j \epsilon''_r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon'_r = n'^2 - n''^2 \\ n'' = \frac{1}{2 n'} \epsilon''_r \end{cases}$$

Sviluppando le espressioni, si ottiene:

$$n'^2 - \left(\frac{1}{2 n'} \epsilon''_r \right)^2 = \epsilon'_r \Rightarrow n'^2 - \frac{1}{4 n'^2} \epsilon''_r^2 = \epsilon'_r \Rightarrow 4 n'^4 - 4 \epsilon'_r n'^2 - \epsilon''_r^2 = 0$$

la cui soluzione è:

$$n'^2 = \frac{4 \epsilon'_r \pm \sqrt{16 \epsilon'^2_r + 16 \epsilon''^2_r}}{8} = \frac{\epsilon'_r \pm \sqrt{\epsilon'^2_r + \epsilon''^2_r}}{2}$$

Sostituendo l'espressione per n'' si ottiene:

$$\begin{cases} n' = \sqrt{\frac{\epsilon'_r + \sqrt{\epsilon'^2_r + \epsilon''^2_r}}{2}} \\ n'' = \frac{1}{2 n'} \epsilon''_r = \frac{\epsilon''_r}{2} \sqrt{\frac{2}{\epsilon'_r + \sqrt{\epsilon'^2_r + \epsilon''^2_r}}} = \sqrt{\frac{\epsilon''^2_r}{2 (\epsilon'_r + \sqrt{\epsilon'^2_r + \epsilon''^2_r})}} \end{cases}$$

da cui la soluzione cercata. Se poi $\epsilon''_r \ll \epsilon'_r$, nella prima relazione ponendo $\epsilon''_r \approx 0$ si ottiene $n' \approx \sqrt{\epsilon'_r}$ e pertanto $n'' = \epsilon''_r / (2 n') \approx \epsilon''_r / (2 \sqrt{\epsilon'_r})$, che è quanto dovevamo dimostrare.

□

Per **onde piane uniformi attenuate** il campo elettrico è diretto ortogonalmente a $\underline{\beta}_0$, versore del vettore di propagazione con ampiezza complessa $\beta - j\alpha$, mentre quello magnetico è ortogonale ad entrambi ed il rapporto tra moduli del campo elettrico e del campo magnetico è pari all'impedenza caratteristica del mezzo η :

$$[\text{B.2.39}] \quad \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \underline{\mathbf{E}}_0 e^{-j(\beta - j\alpha)\underline{\beta}_0 \cdot \mathbf{r}}; \quad \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\eta} \underline{\beta}_0 \times \underline{\mathbf{E}}_0 e^{-j(\beta - j\alpha)\underline{\beta}_0 \cdot \mathbf{r}}; \quad \frac{|\underline{\mathbf{E}}_0|}{|\underline{\mathbf{H}}_0|} = \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Il **vettore di Poynting** risulta, pertanto, diretto come il vettore di propagazione e pari a:

$$[\text{B.2.40}] \quad \underline{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^* = \frac{1}{2 \eta^*} |\underline{\mathbf{E}}_0|^2 e^{-2\alpha \cdot \mathbf{r}} \underline{\beta}_0 = \frac{1}{2} \eta |\underline{\mathbf{H}}_0|^2 e^{-2\alpha \cdot \mathbf{r}} \underline{\beta}_0$$

dove si nota come la densità di potenza decresca in modo esponenziale con costante di attenuazione pari a 2α .

B.2.1.7 Spettro di onde piane

In un mezzo lineare, stazionario, isotropo, omogeneo, non dispersivo e dissipativo, è possibile dimostrare che un campo elettromagnetico qualsiasi può essere espresso come la combinazione di una infinità di onde piane (∞^2). Con riferimento ad una **specificata componente cartesiana** del campo E in regime armonico sussiste la seguente formula:

$$[B.2.41] \quad E(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{k_x k_y}(k_x, k_y) e^{-jk_x x - jk_y y - jk_z z} dk_x dk_y$$

dove:

$$[B.2.42] \quad E_{k_x k_y}(k_x, k_y) = E_{k_t}(\underline{k}_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(x, y, 0) e^{jk_x x + jk_y y} dx dy = \mathfrak{F}_{x,y} \{ E(x, y, 0) \}$$

e inoltre:

$$[B.2.43] \quad k_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon_c - k_x^2 - k_y^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon_c - k_t^2}$$

Tale caso scalare può essere generalizzato al caso vettoriale, come si vedrà nel seguito nel caso di antenne ad apertura.

□

Dimostrazione: spettro di onde piane.

Nel mezzo considerato in assenza di sorgenti ciascuna componente scalare del campo elettrico soddisfa l'equazioni di Helmholtz omogenea (si veda nel seguito) che scriviamo in coordinate cartesiane:

$$\nabla^2 E(\underline{r}) + k^2 E(\underline{r}) = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] E(\underline{r}) + k^2 E(\underline{r}) = 0$$

Se $E(\underline{r})$ ammette la trasformata di Fourier bidimensionale (trasversa) $E_{k_t}(k_x, k_y, z)$ rispetto alle variabili x e y scriviamo l'espressione della antitrasformata:

$$E(x, y, z) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{k_t}(k_x, k_y, z) e^{-jk_x x - jk_y y} dk_x dk_y$$

Introducendo questa espressione nella equazioni di Helmholtz e ricordando la regola della derivata di una trasformata:

$$\nabla^2 E(\underline{r}) + k^2 E(\underline{r}) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(-jk_x)^2 + (-jk_y)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] E_{k_t}(k_x, k_y, z) e^{-jk_x x - jk_y y} dk_x dk_y = 0$$

da questa:

$$\left[k_0^2 - k_x^2 - k_y^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] E_{k_i}(k_x, k_y, z) = k_z^2 E_{k_i}(k_x, k_y, z) + \frac{d^2 E_{k_i}(k_x, k_y, z)}{dz^2} = 0$$

ove $k_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}$. L'ultima eguaglianza è la classica equazioni del moto armonico la cui soluzione generale è:

$$\frac{d^2 E_{k_i}(k_x, k_y, z)}{dz^2} + k_z^2 = 0 \Rightarrow E_{k_i}(k_x, k_y, z) = C_1 e^{-jk_z z} + C_2 e^{+jk_z z}$$

Le onde che si propagano nella direzione delle z positive hanno $C_2=0$ (non ci sono sorgenti per $z \rightarrow \infty$). La costante C_1 deriva imponendo una condizione al contorno. In particolare se è noto il campo sul piano $z=0$:

$$E_{k_i}(k_x, k_y, 0) = E_{k_i}(k_x, k_y) = C_1 \Rightarrow E_{k_i}(k_x, k_y, z) = E_{k_i}(k_x, k_y, z) e^{-jk_z z}$$

che sostituita nell'espressione della antitrasformata fornisce quanto si voleva dimostrare. \square

La funzione $E_{k_i}(k_x, k_y)$ è la **trasformata di Fourier trasversa** rispetto alle variabili spaziali x e y del campo sul piano $z=0$. Le variabili trasformate k_x e k_y , componenti cartesiane di un vettore trasverso \mathbf{k}_t , sono le **frequenze spaziali** (in analogia alla pulsazione nella trasformata rispetto al tempo). La formula esprime il fatto che $E(x, y, z)$ è la somma (integrale) di termini del tipo:

$$E_{k_x, k_y}(k_x, k_y) dk_x dk_y e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} = E_{k_x, k_y}(k_x, k_y) dk_x dk_y e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

Ognuno di questi termini è un'onda piana nel mezzo considerato che si propaga con vettore di propagazione $\mathbf{k} = k_x \mathbf{x}_0 + k_y \mathbf{y}_0 + k_z \mathbf{z}_0 = \mathbf{k}_t + k_z \mathbf{z}_0$ in quanto, in base alla formula di k_z , vale evidentemente la relazione di dispersione $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon$. Nell'integrale sono incluse anche le **onde evanescenti** quando $k_x^2 + k_y^2 > \omega^2 \mu \epsilon$ per cui k_z diviene immaginaria.

B.2.1.8 Limite quantistico dell'elettromagnetismo classico

L'elettromagnetismo, così come descritto dalle equazione di Maxwell, viene anche detto **classico** per distinguerlo dalla **meccanica quantistica** (o elettrodinamica quantistica). Quest'ultima è la **teoria dei sistemi atomici e nucleari**, sviluppata in modo indipendente dall'elettromagnetismo classico e dalla **meccanica classica** o newtoniana.

Storicamente, la prima indicazione di crisi della fisica classica venne dallo studio del fenomeno complesso della radiazione da **corpo nero** (corpo che assorbe tutta l'energia che incide su di esso) che riguarda la termodinamica dello scambio di energia tra radiazione e materia. Classicamente si presume che tale scambio di energia sia continuo, nel senso che la luce di pulsazione ω può cedere una qualsiasi

quantità di energia nell'assorbimento, dipendendo tale energia solo dalla densità di potenza del fascio. Planck³ dimostrò nel 1901 che si ottiene una corretta formulazione termodinamica solo se si presume che lo scambio di energia sia discreto.

In particolare, Planck postulò che la radiazione di frequenza angolare ω può scambiare energia con la materia solo secondo multipli di $\hbar\omega = (h/2\pi)\omega$, dove h è la costante di Planck universale ($h=6.62 \cdot 10^{-34}$ J s). Tale ipotesi si può enunciare dicendo che la radiazione elettromagnetica di frequenza ω si comporta come un flusso di particelle (**fotoni**) di energia E pari a :

$$[B.2.44] \quad E = \hbar\omega$$

che possono essere emessi o assorbiti dalla materia.

Secondo la **Teoria della Relatività Speciale**, formulata da Einstein⁴ nel 1905, la massa m di un corpo varia con la sua velocità v , e la sua massa a riposo m_0 è data dalla trasformazione relativistica:

$$[B.2.45] \quad m_0 = m \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

con c la velocità della luce nel vuoto. Si deduce, quindi, che la massa a riposo m_0 di un fotone deve essere nulla dal momento che tali fotoni viaggiano alla velocità della luce. D'altronde, la relazione relativistica tra massa ed energia $E=mc^2$ può essere riscritta per la quantità di moto $p=mv$ (si omette, in genere, il fattore “ $1/2$ ” includendolo in m) sostituendo l'espressione precedente di m , e ottenendo:

$$[B.2.46] \quad E^2 = (pc)^2 + E_0^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$$

con E_0 l'energia a riposo. Per il fotone di massa a riposo nulla si ha, dunque:

$$p = mv = \frac{E}{c}$$

Dalle precedenti relazioni è possibile ricavare un legame tra i **parametri particellari** (E, p) del fotone e i **parametri ondulatori** (ω, β) dell'onda corrispondente. Infatti, essendo:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{c}{\lambda} = \beta c$$

³ Max K.E.L. Planck (1858-1947), fisico tedesco considerato il fondatore della teoria dei quanti, docente all'università Humboldt di Berlino e insignito del premio Nobel nel 1928.

⁴ Albert Einstein (1879-1955), fisico di origine tedesca cui si deve la formulazione della teoria della relatività speciale (1905) e generale (1915), insignito del premio Nobel nel 1905 per la spiegazione dell'effetto fotoelettrico.

sostituendo la precedente relazione $p=E/c$ e richiamando la legge di Planck otteniamo:

$$[B.2.47] \quad \begin{cases} E = \hbar\omega \\ p = \hbar\beta \end{cases}$$

Esempi tipici, in cui la teoria dell'elettromagnetismo classico fallisce nel fornire una spiegazione a livello microscopico a differenza della teoria quantistica, sono:

- **effetto fotoelettrico**, ovvero incidenza di un fascio di luce monocromatica di pulsazione ω indirizzato su una superficie metallica che causa emissione di elettroni. In tal caso, l'osservazione sperimentale evidenzia che l'energia degli elettroni non dipende dall'intensità della radiazione incidente, ma solo dalla sua frequenza ed è spiegabile in base alla legge di Planck.
- **effetto Compton**, ovvero diffusione di raggi X da parte di elettroni. In tal caso, l'osservazione sperimentale evidenzia che la variazione di lunghezza d'onda degli elettroni diffusi dipende solo dall'angolo di diffusione della radiazione e non dalla frequenza originaria e può spiegarsi mediante l'urto di un fotone con un elettrone.

Gli esperimenti di Davisson e Germer (1927) rivelarono, al contrario dei precedenti, l'aspetto ondulatorio di un fascio di particelle. Essi mostrarono che un fascio di elettroni riflessi dalla superficie di un cristallo di nichel forma figure di diffrazione in perfetta analogia con la diffrazione della luce provocata da un reticolo. Tale figura di diffrazione persiste anche quando l'intensità degli elettroni è così bassa che essi attraversano il dispositivo uno alla volta. La diffrazione è un fenomeno essenzialmente ondulatorio ed il fatto, che esso apparisse in questa circostanza, mostrò che un'onda elettromagnetica con parametri (ω, β) deve essere associata in qualche modo alla singola particella con parametri (E, p) .

Tale dualismo onda-particella fu formulato in modo generale da de Broglie⁵ (1925) per cui ad una particella di energia E e quantità di moto p si può associare un'onda Ψ del tipo:

$$[B.2.48] \quad \Psi(r, t) = \exp[j(\omega t - \beta r)] = \exp\left[j\left(\frac{Et - pr}{\hbar}\right)\right]$$

Tale relazione fornisce correttamente la relazione tra l'ampiezza delle bande di diffrazione e l'energia degli elettroni nell'esperimento di Davisson-Germer.

La **fisica classica** è inadeguata, quindi, se applicata a sistemi microscopici, ma può essere applicata a **sistemi macroscopici**, quali il moto di un corpo stellare o fenomeni circuitali di induzione elettromagnetica. Inoltre, la fisica classica assume il principio per cui le **operazioni di misura** non disturbino apprezzabilmente il loro stato. Per esempio, nell'applicazione delle equazioni di Maxwell, si presume che correnti e campi implicati possano tutti essere misurati senza alterarne il valore o

⁵ Luis V.P.R. de Broglie (1892-1987), fisico francese cui deve la formulazione della meccanica ondulatoria per cui fu insignito del premio Nobel nel 1929.

sconvolgere l'evoluzione del sistema osservato. Più esattamente, si presume che qualsiasi disturbo causato da misure (quale ad esempio la variazione di corrente dovuta all'applicazione di un voltmetro), possa essere in linea di principio, valutato e corretto.

A tal proposito, nel 1958 Dirac⁶ affermò: “C'è un limite alla raffinatezza dei nostri mezzi di osservazione e alla piccolezza dei disturbi conseguenti – un limite che è inerente la natura delle cose e non potrà mai essere oltrepassato dalla tecnica”. In tal senso la fisica classica, e quindi l'**elettromagnetismo classico**, si possono applicare a sistemi fisici macroscopici, ovvero sufficientemente grandi affinché questi inevitabili *disturbi* si possano trascurare. È il caso dell'**ingegneria delle radiofrequenze e delle microonde**.

Per l'analisi di sistemi fisici microscopici, al contrario, i fenomeni elettromagnetici non sono più descrivibili dall'equazione di Maxwell, ma occorre ricorrere all'**elettrodinamica quantistica** introducendo la quantizzazione del campo elettromagnetico attraverso:

- la teoria degli operatori;
- il principio di corrispondenza (tra fisica classica e moderna) e di complementarietà (tra onda e particella);
- l'equazione di Schrodinger⁷ e i livelli discreti di energia di Bohr;
- le funzioni di stato (onde di de Broglie) e l'integrale di sovrapposizione;
- il principio di indeterminazione di Heisenberg⁸.

Per la trattazione completa dell'elettrodinamica quantistica si rimanda, ovviamente, a testi specializzati.

B.2.2 Diffusione della radiazione elettromagnetica

Abbiamo visto nel Cap. 2 come, attraverso il **teorema di induzione**, sia possibile trattare problemi in cui siano presenti degli ostacoli nello spazio di interesse in cui l'antenna irradia. In questo paragrafo vogliamo ricavare l'**equazione integrale** che governa il campo elettromagnetico reirradiato e assorbito dall'ostacolo di cui siano note le proprietà dielettriche e conduttive, e introdurre le grandezze che caratterizzano le proprietà dell'ostacolo di assorbire o diffondere nelle diverse direzioni la radiazione su esso incidente.

⁶ Paul A.M. Dirac (1902-1984), fisico di origine inglese, fondatore della meccanica quantistica e insignito con E. Schroedinger del premio Nobel nel 1933.

⁷ Erwin R.J.A. Schroedinger (1887-1961), fisico austriaco noto per la formulazione dell'omonima equazione nella meccanica quantistica, insignito del premio Nobel nel 1933.

⁸ Werner C. Heisenberg (1901-1967), fisico tedesco, inventore della meccanica delle matrici nella fisica dei quanti e autore dell'omonimo principio di indeterminazione, insignito del premio Nobel nel 1932.

B2.2.1 Equazione integrale del campo elettrico e magnetico

Con riferimento alla figura B.2.4, consideriamo un corpo non omogeneo di volume V con costante dielettrica relativa $\epsilon_r(\mathbf{r})$ in genere complessa:

$$[\text{B.2.49}] \quad \epsilon_r(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_c(\mathbf{r})}{\epsilon_0} = \epsilon'_r(\mathbf{r}) - j\epsilon''_r(\mathbf{r})$$

immerso nel vuoto (o in un mezzo equivalente). Sia presente, in assenza del corpo, un **campo elettromagnetico incidente** $\underline{\mathbf{E}}_i$, $\underline{\mathbf{H}}_i$ assunto per semplicità pari a quello di un'onda piana di ampiezza unitaria che si propaga in una direzione con versore $\hat{\mathbf{i}}_0$. In presenza del corpo si introduca il **campo e.m. diffuso** (o, in inglese, *scattering e.m. field*) $\underline{\mathbf{E}}_s$ e $\underline{\mathbf{H}}_s$ tale che il campo totale $\underline{\mathbf{E}}$ e $\underline{\mathbf{H}}$ in ogni punto all'esterno al volume V è dato da:

$$[\text{B.2.50}] \quad \begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= \underline{\mathbf{E}}_i(\mathbf{r}) + \underline{\mathbf{E}}_s(\mathbf{r}) \\ \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) &= \underline{\mathbf{H}}_i(\mathbf{r}) + \underline{\mathbf{H}}_s(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Si dimostra che il campo diffuso può essere ricavato dalle seguenti equazioni:

$$[\text{B.2.51}] \quad \begin{aligned} \nabla \times \underline{\mathbf{E}}_s &= -j\omega\mu_0 \underline{\mathbf{H}}_s \\ \nabla \times \underline{\mathbf{H}}_s &= j\omega\epsilon_0(\mathbf{r})\underline{\mathbf{E}}_s + \underline{\mathbf{J}}_{eq} \end{aligned}$$

ovvero considerando l'irradiazione della **densità di corrente elettrica equivalente** $\underline{\mathbf{J}}_{eq}$ nello spazio libero (con costanti primarie μ_0 e ϵ_0) fornite dalle seguenti:

$$\underline{\mathbf{J}}_{eq}(\mathbf{r}) = \begin{cases} j\omega\epsilon_0[\epsilon_r(\mathbf{r}) - 1]\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = j\omega\epsilon_0[\epsilon'_r(\mathbf{r}) - j\epsilon''_r(\mathbf{r}) - 1]\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) & \text{in } V \\ 0 & \text{fuori di } V \end{cases}$$

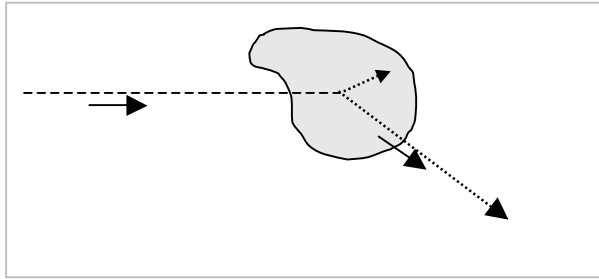


FIGURA B.2.4 Problema di diffusione di radiazione e.m. ϵ_0, μ_0

Pertanto, possiamo interpretare il problema considerando che il campo incidente eccita delle correnti nell'ostacolo che sono in grado di irradiare a loro volta, dando luogo al fenomeno di **diffusione elettromagnetica**, oppure di trasformare la loro energia in altra forma, determinando fenomeni di **assorbimento elettromagnetico** all'interno del volume V . Notiamo che le sorgenti equivalenti sono a loro volta funzioni del campo totale in presenza dell'ostacolo, che è incognito, e, quindi, come

già visto trattando del teorema di equivalenza nel Cap. 2, il problema è stato solamente “spostato”, ma non risolto.

Dimostrazione: equazione integrale di diffusione e.m.

Le prime due equazioni di Maxwell per il campo elettromagnetico totale, in presenza del corpo ed in assenza di correnti imprresse nel volume di interesse, si scrivono:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j\omega\mu_0 \underline{\mathbf{H}}$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon_c(\underline{\mathbf{r}}) \underline{\mathbf{E}}$$

La seconda equazione di Maxwell si può scrivere anche:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}}) = j\omega\epsilon_c(\underline{\mathbf{r}}) \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = -j\omega\epsilon_0 \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) + j\omega\epsilon_0 \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) + j\omega\epsilon_c(\underline{\mathbf{r}}) \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}})$$

ovvero:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}}) = j\omega\epsilon_0 \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) + j\omega\epsilon_0 [\epsilon_{rc}(\underline{\mathbf{r}}) - 1] \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = +j\omega\epsilon_0 \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) + \underline{\mathbf{J}}_{eq}(\underline{\mathbf{r}})$$

dove le densità di corrente equivalente $\underline{\mathbf{J}}_{eq}$ sono diverse da zero solo all'interno del corpo. Le equazioni di Maxwell, esplicitando campi incidenti e campi di diffusione:

$$\nabla \times (\underline{\mathbf{E}}_i + \underline{\mathbf{E}}_s) = -j\omega\mu_0 (\underline{\mathbf{H}}_i + \underline{\mathbf{H}}_s)$$

$$\nabla \times (\underline{\mathbf{H}}_i + \underline{\mathbf{H}}_s) = j\omega\epsilon_0(\underline{\mathbf{r}}) (\underline{\mathbf{E}}_i + \underline{\mathbf{E}}_s) + \underline{\mathbf{J}}_{eq}$$

Considerando che $\underline{\mathbf{E}}_i$, $\underline{\mathbf{H}}_i$ di un'onda piana sono soluzione di un problema omogeneo (senza sorgenti imprresse) tale che:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}}_i = -j\omega\mu_0 \underline{\mathbf{H}}_i$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}}_i = j\omega\epsilon_0 \underline{\mathbf{E}}_i$$

e sostituendo, si ricavano le equazioni del campo di diffusione e.m. che dovevamo dimostrare.

□

La soluzione delle equazioni di Maxwell, essendo le sorgenti $\underline{\mathbf{J}}_{eq}$ nel vuoto, si può ricavare considerando la funzione di Green nello spazio libero e, a grande distanza dal corpo, la sua approssimazione in zona di Fraunhofer (si veda Cap. 2):

$$[B.2.50] \quad G_\infty(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = \frac{1}{4\pi |\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}'|} e^{-jk|\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}'|} \approx \frac{1}{4\pi r} e^{-jk(r - \underline{\mathbf{r}}_0 \cdot \underline{\mathbf{r}}')}$$

dove $\underline{\mathbf{r}}$ è il punto di osservazione, $\underline{\mathbf{r}}'$ è un punto generico dove ci sono le sorgenti e quindi all'interno di V ed $\underline{\mathbf{r}}_0$ è il versore nella direzione di osservazione del campo di diffuse (figura B.2.3). Si ricava per il campo elettrico diffuso a grande distanza dal corpo:

$$[B.2.51] \quad \underline{\mathbf{E}}_{\infty s}(\underline{\mathbf{r}}) = -\frac{k^2}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \int_V [\underline{\mathbf{r}}_0 \times \underline{\mathbf{r}}_0 \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}')] [\epsilon_{rc}(\underline{\mathbf{r}}') - 1] e^{jk\underline{\mathbf{r}}_0 \cdot \underline{\mathbf{r}}'} dV'$$

Questa espressione fornisce il campo a grande distanza in termini del campo presente all'interno del corpo stesso. Formalmente, l'espressione di $\underline{\mathbf{E}}_{\infty s}$ può essere riscritta nel modo seguente

$$[B.2.52] \quad \underline{\mathbf{E}}_{\infty s}(\underline{\mathbf{r}}) = \frac{k^2}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \underline{\mathbf{F}}_s(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0) = C_s \frac{e^{-ikr}}{r} \underline{\mathbf{F}}_s(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0)$$

dove la *funzione vettoriale di diffusione e.m.* $\underline{\mathbf{F}}_s$ è data da:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{F}}_s(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0) &= - \int_V [\underline{\mathbf{r}}_0 \times \underline{\mathbf{r}}_0 \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}')] [\epsilon_{rc}(\underline{\mathbf{r}}') - 1] e^{j\mathbf{k}_{\underline{\mathbf{r}}_0} \cdot \underline{\mathbf{r}}'} dV' = \\ &= \int_V [\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}') - \underline{\mathbf{r}}_0 [\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}') \cdot \underline{\mathbf{r}}_0]] [\epsilon_{rc}(\underline{\mathbf{r}}') - 1] e^{j\mathbf{k}_{\underline{\mathbf{r}}_0} \cdot \underline{\mathbf{r}}'} dV' \end{aligned}$$

mentre C_s è una costante complessa pari a $k^2/4\pi$ con $\underline{\mathbf{i}}_0$ e $\underline{\mathbf{r}}_0$ sono i versori delle direzioni di propagazione del campo elettromagnetico incidente e di quello diffuso. Si noti, peraltro, che al campo diffuso contribuisce solo la componente del campo interno ortogonale alla direzione di diffusione.

Dimostrazione: calcolo del campo diffuso

In campo lontano sussiste poi la regola che una operazione di differenziazione su $G(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')$ si traduce in una moltiplicazione per $-jk\underline{\mathbf{r}}_0$ e pertanto:

$$\nabla G_{\infty}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') \equiv \frac{-jk\underline{\mathbf{r}}_0}{4\pi r} e^{-jk(r - \underline{\mathbf{r}}_0 \cdot \underline{\mathbf{r}}')} = -jk\underline{\mathbf{r}}_0 G(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')$$

Utilizzando il metodo di soluzione dei potenziali elettrodinamici (si veda Cap. 2), notando che l'operatore ∇ agisce sul punto di osservazione $\underline{\mathbf{r}}$ mentre $\underline{\mathbf{J}}_{eq}(\underline{\mathbf{r}}')$ non dipende da $\underline{\mathbf{r}}$, e ricordando la regola per il rotore del prodotto di un vettore per uno scalare⁹, si ottiene per il campo magnetico diffuso $\underline{\mathbf{H}}_{\infty s}$ nei punti $\underline{\mathbf{r}} \neq \underline{\mathbf{r}}'$:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{H}}_{\infty s} &= \nabla \times \underline{\mathbf{A}} = \nabla \times \int_V G_{\infty}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') \underline{\mathbf{J}}_{eq}(\underline{\mathbf{r}}') dV' = \int_V \nabla \times G_{\infty}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') \underline{\mathbf{J}}_{eq}(\underline{\mathbf{r}}') dV' \equiv \\ &= -jk \int_V G_{\infty}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') \underline{\mathbf{r}}_0 \times \underline{\mathbf{J}}_{eq}(\underline{\mathbf{r}}') dV' \end{aligned}$$

Tale equazione si può anche ottenere direttamente dall'integrale di radiazione in campo lontano, notando che $\underline{\mathbf{J}} = \underline{\mathbf{J}}_{eq}$ e $\underline{\mathbf{J}}_{mi} = 0$ in V . Nei punti esterni al corpo dove $\underline{\mathbf{J}}_{eq}(\underline{\mathbf{r}}) = 0$, dalla seconda equazione di Maxwell, si ottiene poi il campo $\underline{\mathbf{E}}_{\infty s}$. Applicando la teoria dei potenziali elettrodinamici ovvero usando la II equazione di Maxwell che lega $\underline{\mathbf{H}}_{\infty s}$ e $\underline{\mathbf{D}}_{\infty}$ in spazio libero da sorgenti, si ricava per il campo elettrico diffuso $\underline{\mathbf{E}}_{\infty s}$ nei punti $\underline{\mathbf{r}} \neq \underline{\mathbf{r}}'$:

⁹ Ricordiamo che vale la seguente relazione vettoriale per il rotore di una funzione scalare moltiplicata per una funzione vettoriale: $\nabla \times (\psi \underline{\mathbf{a}}) = \nabla \psi \times \underline{\mathbf{a}} - \psi \nabla \times \underline{\mathbf{a}}$

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{E}}_{\infty_s}(\underline{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \nabla \times \underline{\mathbf{H}}_{\infty_s} = \frac{-k}{\omega\epsilon_0} \nabla \times \int_V G_{\infty}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') \underline{\mathbf{r}}_0 \times \underline{\mathbf{J}}_{eq}(\underline{\mathbf{r}}') dV' = \\ &= \frac{jk^2}{\omega\epsilon_0} \int_V G_{\infty}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') \left[\underline{\mathbf{r}}_0 \times \underline{\mathbf{r}}_0 \times \underline{\mathbf{J}}_{eq}(\underline{\mathbf{r}}') \right] dV'\end{aligned}$$

Sostituendo l'espressione di $\underline{\mathbf{J}}_{eq}$ e di G_{∞} nella precedente:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{E}}_{\infty_s}(\underline{\mathbf{r}}) &= \frac{jk^2}{\omega\epsilon_0} \int_V \frac{e^{-jk(r-\underline{\mathbf{r}}_0 \cdot \underline{\mathbf{r}}')}}{4\pi r} \left[\underline{\mathbf{r}}_0 \times \underline{\mathbf{r}}_0 \times j\omega\epsilon_0 [\epsilon_{rc}(\underline{\mathbf{r}}') - 1] \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}') \right] dV' = \\ &= \frac{-k^2}{4\pi} e^{-jkr} \int_V \frac{e^{-jk\underline{\mathbf{r}}_0 \cdot \underline{\mathbf{r}}'}}{r} \left[\underline{\mathbf{r}}_0 \times \underline{\mathbf{r}}_0 \times [\epsilon_{rc}(\underline{\mathbf{r}}') - 1] \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}') \right] dV' =\end{aligned}$$

si ricava:

$$\underline{\mathbf{E}}_{\infty_s}(\underline{\mathbf{r}}) = \frac{k^2}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \underline{\mathbf{F}}_s(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0) = C_s \frac{e^{-ikr}}{r} \underline{\mathbf{F}}_s(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0)$$

dove la *funzione vettoriale di diffusione e.m.* $\underline{\mathbf{F}}_s$ è data da:

$$\underline{\mathbf{F}}_s(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0) = \int_V [\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}') - \underline{\mathbf{r}}_0 [\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}') \cdot \underline{\mathbf{r}}_0]] [\epsilon_{rc}(\underline{\mathbf{r}}') - 1] e^{jk\underline{\mathbf{r}}_0 \cdot \underline{\mathbf{r}}'} dV'$$

Ciò è quanto dovevamo dimostrare. □

Tale espressione di $\underline{\mathbf{E}}_{\infty_s}$ è analoga a quella trovata per il campo elettrico irradiato da una sorgente generica in V , ma in questo caso il campo elettrico interno $\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}')$ non è noto per cui l'integrando è incognito. L'equazione ricavata, quindi, costituisce un'**equazione integrale per il campo elettrico** (in inglese, EFIE: *Electric Field Integral Equation*) e analogamente per il campo magnetico in presenza di un ostacolo diffondente. In certi casi, è possibile esprimere in forma approssimata il campo interno al corpo ed usando tale relazione diventa possibile risolvere il problema. Esempi notevoli di tale approccio sono la **soluzione esatta di Mie** per ostacoli di forma sferica, investiti da un'onda piana uniforme, e la sua **approssimazione di Rayleigh** per sfere elettricamente piccole.

B.2.2.2 Sezioni trasverse di interazione elettromagnetica

Analogamente a quanto già visto per le antenne, anche il campo elettromagnetico reirradiato dall'ostacolo in zona lontana è un'onda localmente piana uniforme il cui vettore di Poynting a grande distanza $\underline{\mathbf{P}}_{\infty_s}$ vale, usando l'eq. [B.1.52]:

$$\underline{\mathbf{P}}_{\infty_s}(\underline{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2\eta} \frac{|C_s|^2}{r^2} |\underline{\mathbf{F}}_s(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0)|^2 \underline{\mathbf{r}}_0 = P_{\infty_s}(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0) \underline{\mathbf{r}}_0$$

La **sezione traversa di diffusione bistatica** [m²], detta anche sezione trasversa differenziale o sezione trasversa radar (in inglese, RCS: *Radar Cross Section*) $\sigma(\mathbf{i}_0, \mathbf{r}_0)$ dell'ostacolo si definisce come segue:

$$[B.2.53] \quad \sigma(\mathbf{i}_0, \mathbf{r}_0) = \frac{4\pi r^2 P_{\infty_s}(\mathbf{i}_0, \mathbf{r}_0)}{P_i(\mathbf{i}_0)} = \frac{4\pi r^2 \frac{|C_s|^2}{r^2} |\mathbf{E}_s(\mathbf{i}_0, \mathbf{r}_0)|^2}{\frac{1}{2\eta} |E_i(\mathbf{i}_0)|^2} = 4\pi |C_s|^2 \frac{|\mathbf{E}_s(\mathbf{i}_0, \mathbf{r}_0)|^2}{|E_i(\mathbf{i}_0)|^2}$$

Nel caso di radar monostatici (in cui l'antenna è rice-trasmittente), è utile definire la **sezione traversa di retrodiffusione** [m²] (in inglese, *backscattering*) $\sigma_b(\mathbf{i}_0, -\mathbf{i}_0)$:

$$[B.2.54] \quad \sigma_b(\mathbf{i}_0, -\mathbf{i}_0) = 4\pi \frac{r^2 P_{\infty_s}(\mathbf{i}_0, -\mathbf{i}_0)}{P_i(\mathbf{i}_0)} = 4\pi |C_s|^2 \frac{|\mathbf{E}_s(\mathbf{i}_0, -\mathbf{i}_0)|^2}{|E_i(\mathbf{i}_0)|^2}$$

dove $\mathbf{r}_0 = -\mathbf{i}_0$ indica la direzione di retrodiffusione. La sezione $\sigma_b(\mathbf{i}_0, -\mathbf{i}_0)$ è anche detta semplicemente **sezione radar trasversa** monostatica ed è stata già introdotta nel paragrafo (1.6.4).

La **sezione traversa di diffusione** [m²] (in inglese, *scattering*) $\sigma_s(\mathbf{i}_0)$ si ottiene integrando la $\sigma(\mathbf{i}_0, \mathbf{r}_0)$ sull'intero angolo solido di diffusione $\Omega_s = 4\pi$ (tale che $d\Omega_s = \sin\theta_s d\theta_s d\varphi_s$):

$$[B.2.55] \quad \sigma_s(\mathbf{i}_0) = \frac{W_s}{P_i(\mathbf{i}_0)} = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \sigma(\mathbf{i}_0, \mathbf{r}_0) d\Omega_s$$

dove W_s è la potenza elettromagnetica complessivamente diffusa in tutte le direzioni data da:

$$W_s = \oint_S P_{\infty_s}(\mathbf{r}') d^2 \mathbf{r}' = \int_{4\pi} r^2 P_{\infty_s}(\mathbf{r}') d\Omega_s = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} 4\pi r^2 P_{\infty_s}(\mathbf{r}') d\Omega_s = \frac{P_i(\mathbf{i}_0)}{4\pi} \int_{4\pi} \frac{4\pi r^2 P_{\infty_s}(\mathbf{r}')}{P_i(\mathbf{i}_0)} d\Omega_s$$

L'ostacolo, oltre che a diffondere energia elettromagnetica, ne assorbe in funzione delle proprie caratteristiche dielettriche e conduttive. La **sezione traversa di assorbimento** $\sigma_a(\mathbf{i}_0)$ [m²] di un corpo dielettrico dissipativo di volume V è fornita dal seguente integrale:

$$[B.2.56] \quad \sigma_a(\mathbf{i}_0) = \frac{W_a}{P_i(\mathbf{i}_0)} = \frac{1}{2P_i} \int_V [\omega \epsilon_0 \epsilon_r''(\mathbf{r}') + \sigma] |\mathbf{E}(\mathbf{r}')|^2 dV'$$

dove W_a è la potenza assorbita per fenomeni di conduzione e dissipazione dielettrica. Infatti, ricordando che se σ è la conducibilità dell'ostacolo risulta:

$$j\omega \epsilon_0 \epsilon_r + \sigma = j\omega \epsilon_0 (\epsilon_r' - j\epsilon_r'') + \sigma = j\omega \epsilon_0 \epsilon_r' + (\omega \epsilon_0 \epsilon_r'' + \sigma) \equiv j\omega \epsilon_c$$

Se \mathbf{J}_c sono le correnti di perdita per conduzione e spostamento ed \mathbf{E} è il campo all'interno del corpo, la potenza assorbita W_a per unità di volume in base al teorema di Poynting vale:

$$W_a = \frac{1}{2} \mathbf{J}_c \cdot \mathbf{E}^* = \frac{1}{2} [(\omega \epsilon_0 \epsilon_r'' + \sigma) \mathbf{E}] \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\omega \epsilon_0 \epsilon_r'' + \sigma) |\mathbf{E}|^2$$

Si definisce la **sezione trasversa di estimazione** [m²] nel modo seguente:

$$\sigma_e(\mathbf{i}_0) = \frac{W_e}{P_i(\mathbf{i}_0)} = \frac{W_s + W_a}{P_i(\mathbf{i}_0)} = \sigma_s(\mathbf{i}_0) + \sigma_a(\mathbf{i}_0)$$

mentre l'albedo superficiale è dato da:

$$w(\mathbf{i}_0) = \frac{W_s}{W_e} = \frac{\sigma_s(\mathbf{i}_0)}{\sigma_e(\mathbf{i}_0)}$$

Nel caso di interazioni con superfici e applicazioni monostatiche, è usuale definire un **coefficiente di retrodiffusione superficiale** σ^0 (adimensionale) nel modo seguente:

$$\sigma^0(\mathbf{i}_0, -\mathbf{i}_0) = \frac{\sigma_b(\mathbf{i}_0, -\mathbf{i}_0)}{\Delta A_i} = \frac{\sigma_b(\mathbf{i}_0, -\mathbf{i}_0)}{\Delta A_i / \cos \theta} = \beta^0(\mathbf{i}_0, -\mathbf{i}_0) \cos \theta$$

dove ΔA_i è la superficie illuminata dalla sorgente e.m., proiezione della superficie trasversa ΔA_t (alla direzione di incidenza) secondo un angolo compreso pari a θ (pari tipicamente l'angolo di incidenza rispetto alla normale della superficie illuminata ΔA_i). Il parametro β^0 viene definito come coefficiente di retrodiffusione trasverso.

Nel caso di interazioni con volumi (penetrabili dalla radiazione incidente) e applicazioni monostatiche, è usuale definire un **coefficiente di retrodiffusione volumetrico** [m⁻¹] nel modo seguente:

$$\eta(\mathbf{i}_0, -\mathbf{i}_0) = \frac{\sigma_b(\mathbf{i}_0, -\mathbf{i}_0)}{\Delta V} = \frac{\sigma_b(\mathbf{i}_0, -\mathbf{i}_0)}{r^2 \Delta r \Delta \Omega}$$

dove ΔV è il volume illuminato dalla sorgente e.m., dato a distanza r dalla sorgente con fascio irradiato di larghezza angolare $\Delta \Omega$ e risoluzione radiale Δr da $\Delta V = \Delta r (r^2 \Delta \Omega)$.

B.2.2.3 Matrice complessa di diffusione e.m.

Nelle espressioni delle varie sezioni trasverse di interazione e.m. non compare in modo esplicito la **polarizzazione**, avendo assunto di calcolare la densità di potenza totale dovuta ai due stati di polarizzazione ortogonali del campo diffuso $\mathbf{E}_{\infty s}$ a fronte di una densità di potenza totale incidente P_i . In generale, è possibile

modellare o misurare sia il campo e.m. diffuso che quello incidente rispetto allo stato di **polarizzazione p o q** (dove p e q possono rappresentare, per esempio, la polarizzazione lineare orizzontale h o verticale v) può assumere stati di polarizzazione diversi da quello incidente.

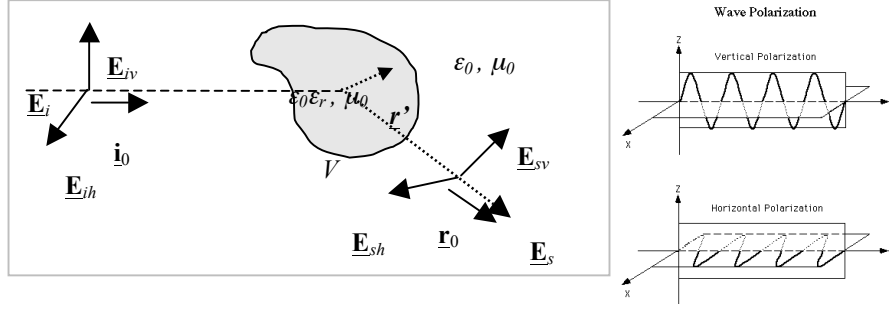


FIGURA B.2.5 Polarimetria nel problema di diffusione di radiazione e.m.

Nel caso generale, possiamo riferirci ad una particolare componente di polarizzazione dei campi e.m. in modo tale che le sezioni trasverse definite dipenderanno da altri due pedici p e q , rispettivamente la polarizzazione del campo incidente e del campo diffuso. Supponiamo di scomporre il campo elettrico incidente e diffuso secondo **2 polarizzazioni ortogonali lineari** (verticale e orizzontale, rispetto ad una superficie di riferimento), utilizzando opportuni versori:

$$\begin{aligned}\underline{E}_i &= E_{ih} \underline{h}_{0i} + E_{iv} \underline{v}_{0i} \\ \underline{E}_{\infty s} &= E_{\infty sh} \underline{h}_{0s} + E_{\infty sv} \underline{v}_{0s}\end{aligned}$$

La **sezione trasversa bistatica polarimetrica** si indica con $\sigma_{pq}(\underline{i}_0, \underline{r}_0)$ ed è espressa da:

$$[B.2.57] \quad \sigma_{pq}(\underline{i}_0, \underline{r}_0) = \frac{4\pi r^2 P_{\infty sp}(\underline{i}_0, \underline{r}_0)}{P_{iq}(\underline{i}_0)} = \frac{4\pi r^2 |C_s|^2}{2\eta r^2} \frac{|F_{npq}(\underline{i}_0, \underline{r}_0)|^2 |E_{iq}(\underline{i}_0)|^2}{\frac{1}{2\eta} |E_{iq}(\underline{i}_0)|^2}$$

da cui:

$$\sigma_{pq}(\underline{i}_0, \underline{r}_0) = 4\pi |C_s|^2 |F_{npq}(\underline{i}_0, \underline{r}_0)|^2$$

dove $F_{npq}(\underline{i}_0, \underline{r}_0)$ è la componente in polarizzazione p di \underline{E}_s normalizzata alla componente in polarizzazione q del campo incidente \underline{E}_i . Introducendo le componenti complesse $S_{pq}(\underline{i}_0, \underline{r}_0)$, elementi di posizione p - q della matrice 2×2 di diffusione complessa $\underline{S}(\underline{i}_0, \underline{r}_0)$ tale che, nel caso di decomposizione in polarizzazioni lineari di tipo orizzontale ($p, q = h$) e verticale ($p, q = v$), si può esprimere il campo diffuso anche in forma matriciale:

$$[B.2.58] \quad \underline{\mathbf{E}}_{\infty s}(\underline{\mathbf{r}}) = \begin{bmatrix} E_{\infty sh} \\ E_{\infty sv} \end{bmatrix} = \frac{e^{-ikr}}{r} \begin{bmatrix} S_{bh} & S_{bv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ib} \\ E_{iv} \end{bmatrix} = \frac{e^{-ikr}}{r} \underline{\mathbf{S}}(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0) \underline{\mathbf{E}}_i(\underline{\mathbf{r}})$$

La relazione tra $S_{pq}(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0)$ e $F_{npq}(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0)$ è facilmente deducibile dalle equazioni [B.2.52] e [B.2.58], come dimostrato nel seguito. La sezione trasversa bistatica polarimetrica può essere, dunque, anche scritta come:

$$[B.2.59] \quad \sigma_{pq}(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0) = \frac{4\pi r^2 P_{\infty sp}(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0)}{P_{iq}(\underline{\mathbf{i}}_0)} = 4\pi |S_{pq}(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0)|^2$$

Dimostrazione: matrice di diffusione complessa

Il campo elettrico diffuso in zona lontana abbiamo dimostrato essere da data:

$$\underline{\mathbf{E}}_{\infty s}(\underline{\mathbf{r}}) = \frac{k^2}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \underline{\mathbf{F}}_s(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0) = C_s \frac{e^{-ikr}}{r} \underline{\mathbf{F}}_s(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0)$$

dove

$$\underline{\mathbf{F}}_s(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0) = \int_V [1 - \varepsilon_{rc}(\underline{\mathbf{r}}')] [\underline{\mathbf{r}}_0 \times \underline{\mathbf{r}}_0 \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}')] e^{jk\underline{\mathbf{r}}_0 \cdot \underline{\mathbf{r}}'} dV'$$

e supponiamo che incida il campo elettrico con polarizzazione lineare orizzontale $\underline{\mathbf{E}}_i = E_{ib} \underline{\mathbf{h}}_{0i}$. Possiamo definire:

$$\underline{\mathbf{F}}_s(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0) = \left[\int_V [1 - \varepsilon_{rc}(\underline{\mathbf{r}}')] [\underline{\mathbf{r}}_0 \times \underline{\mathbf{r}}_0 \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}')] \frac{e^{-jk\underline{\mathbf{r}}_0 \cdot \underline{\mathbf{r}}'}}{E_{ib}} dV' \right] E_{ib} = F_{nbb} E_{ib} \underline{\mathbf{h}}_{0s} + F_{mbb} E_{ib} \underline{\mathbf{v}}_{0s}$$

dove le componenti normalizzate di $\underline{\mathbf{F}}_s$ sono date da:

$$\left\{ \begin{aligned} F_{nbb} &= \frac{\underline{\mathbf{F}}_s(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0) \cdot \underline{\mathbf{h}}_{0s}}{E_{ib}} = \left[\int_V [1 - \varepsilon_{rc}(\underline{\mathbf{r}}')] [\underline{\mathbf{r}}_0 \times \underline{\mathbf{r}}_0 \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}')] \cdot \underline{\mathbf{h}}_{0s} \frac{e^{jk\underline{\mathbf{r}}_0 \cdot \underline{\mathbf{r}}'}}{E_{ib}} dV' \right] \\ F_{mbb} &= \frac{\underline{\mathbf{F}}_s(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0) \cdot \underline{\mathbf{v}}_{0s}}{E_{ib}} = \left[\int_V [1 - \varepsilon_{rc}(\underline{\mathbf{r}}')] [\underline{\mathbf{r}}_0 \times \underline{\mathbf{r}}_0 \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}')] \cdot \underline{\mathbf{v}}_{0s} \frac{e^{jk\underline{\mathbf{r}}_0 \cdot \underline{\mathbf{r}}'}}{E_{ib}} dV' \right] \end{aligned} \right.$$

Si noti che se il campo interno fosse approssimato nel modo seguente:

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}') \cong T(\underline{\mathbf{r}}') \underline{\mathbf{E}}_i$$

dove T è una funzione scalare dipendente dall'ostacolo e dalle sue dimensioni elettriche (tale funzione può essere generalizzata in forma matriciale, tenendo conto di eventuali effetti depolarizzanti dell'ostacolo stesso, per semplicità ci si è limitati al caso scalare), essendo $\underline{\mathbf{E}}_i$ costante e indipendente da $\underline{\mathbf{r}}'$, si avrebbe per $\underline{\mathbf{F}}_s$ e le sue componenti:

$$\underline{\mathbf{F}}_s(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0) = \left[\int_V T(\underline{\mathbf{r}}') [1 - \varepsilon_{rc}(\underline{\mathbf{r}}')] [\underline{\mathbf{r}}_0 \times \underline{\mathbf{r}}_0 \times \underline{\mathbf{h}}_{0i}] e^{jk\underline{\mathbf{r}}_0 \cdot \underline{\mathbf{r}}'} dV' \right] E_{ib} = F_{nbb} E_{ib} \underline{\mathbf{h}}_{0s} + F_{mbb} E_{ib} \underline{\mathbf{v}}_{0s}$$

In termini di campo diffuso si avrà:

$$\underline{\mathbf{E}}_{\infty s} = E_{\infty sb} \underline{\mathbf{h}}_{0s} + E_{\infty sv} \underline{\mathbf{v}}_{0s} = C_s \frac{e^{-ikr}}{r} F_{nbh} E_{ib} \underline{\mathbf{h}}_{0s} + F_{mbv} E_{ib} \underline{\mathbf{v}}_{0s}$$

Analogamente, se supponiamo che incida il campo elettrico con polarizzazione lineare verticale $\underline{\mathbf{E}}_i = E_{iv} \underline{\mathbf{v}}_{0i}$, si ha per $\underline{\mathbf{F}}_s$ e le sue componenti:

$$\underline{\mathbf{F}}_s(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0) = \left[\int_V T(\underline{\mathbf{r}}') [1 - \varepsilon_{rc}(\underline{\mathbf{r}}')] [\underline{\mathbf{r}}_0 \times \underline{\mathbf{r}}_0 \times \underline{\mathbf{h}}_{0i}] \frac{e^{jk \underline{\mathbf{r}}_0 \cdot \underline{\mathbf{r}}'}}{E_{iv}} dV' \right] E_{iv} = F_{nbv} E_{iv} \underline{\mathbf{h}}_{0s} + F_{mvv} E_{iv} \underline{\mathbf{v}}_{0s}$$

dove:

$$\begin{cases} F_{nbv} = \frac{\underline{\mathbf{F}}_s(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0) \cdot \underline{\mathbf{h}}_{0s}}{E_{iv}} = \left[\int_V [1 - \varepsilon_{rc}(\underline{\mathbf{r}}')] [\underline{\mathbf{r}}_0 \times \underline{\mathbf{r}}_0 \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}')] \cdot \underline{\mathbf{h}}_{0s} \frac{e^{jk \underline{\mathbf{r}}_0 \cdot \underline{\mathbf{r}}'}}{E_{iv}} dV' \right] \\ F_{mvv} = \frac{\underline{\mathbf{F}}_s(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0) \cdot \underline{\mathbf{v}}_{0s}}{E_{iv}} = \left[\int_V [1 - \varepsilon_{rc}(\underline{\mathbf{r}}')] [\underline{\mathbf{r}}_0 \times \underline{\mathbf{r}}_0 \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}')] \cdot \underline{\mathbf{v}}_{0s} \frac{e^{jk \underline{\mathbf{r}}_0 \cdot \underline{\mathbf{r}}'}}{E_{iv}} dV' \right] \end{cases}$$

In termini di campo diffuso si avrà:

$$\underline{\mathbf{E}}_{\infty s} = E_{\infty sb} \underline{\mathbf{h}}_{0s} + E_{\infty sv} \underline{\mathbf{v}}_{0s} = C_s \frac{e^{-ikr}}{r} F_{nbv} E_{iv} \underline{\mathbf{h}}_{0s} + F_{mvv} E_{iv} \underline{\mathbf{v}}_{0s}$$

Le espressioni del campo diffuso nei 2 casi di incidenza possono essere sovrapposte ed espresse per una generica polarizzazione ellittica del campo incidente. Abbiamo, infatti, ottenuto che:

$$\begin{cases} E_{\infty sb} = C_s \frac{e^{-ikr}}{r} F_{nbh} E_{ib} & \text{se } \underline{\mathbf{E}}_i = E_{ib} \underline{\mathbf{h}}_{0i} \\ E_{\infty sv} = C_s \frac{e^{-ikr}}{r} F_{mbv} E_{ib} & \text{se } \underline{\mathbf{E}}_i = E_{ib} \underline{\mathbf{h}}_{0i} \end{cases} \quad \begin{cases} E_{\infty sb} = C_s \frac{e^{-ikr}}{r} F_{nbv} E_{iv} & \text{se } \underline{\mathbf{E}}_i = E_{iv} \underline{\mathbf{v}}_{0i} \\ E_{\infty sv} = C_s \frac{e^{-ikr}}{r} F_{mvv} E_{iv} & \text{se } \underline{\mathbf{E}}_i = E_{iv} \underline{\mathbf{v}}_{0i} \end{cases}$$

In forma matricialmente compatta si può scrivere quanto segue:

$$\begin{bmatrix} E_{\infty sb}(\underline{\mathbf{r}}) \\ E_{\infty sv}(\underline{\mathbf{r}}) \end{bmatrix} = C_s \frac{e^{-ikr}}{r} \begin{bmatrix} F_{nbh}(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0) & F_{nbv}(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0) \\ F_{mbh}(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0) & F_{mvv}(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ib} \\ E_{iv} \end{bmatrix}$$

ovvero:

$$\begin{bmatrix} E_{\infty sb}(\underline{\mathbf{r}}) \\ E_{\infty sv}(\underline{\mathbf{r}}) \end{bmatrix} = \frac{e^{-ikr}}{r} \begin{bmatrix} S_{bh}(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0) & S_{bv}(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0) \\ S_{vh}(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0) & S_{vv}(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ib} \\ E_{iv} \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\mathbf{E}}_{\infty s}(\underline{\mathbf{r}}) = \frac{e^{-ikr}}{r} \underline{\mathbf{S}}(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0) \underline{\mathbf{E}}_i$$

La matrice, i cui elementi sono i termini complessi S_{pq} , è detta **matrice complessa** di diffusione ed esprime le proprietà del campo diffuso in termini di direzione, ampiezza e fase. Si deducono, peraltro, le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} S_{pq}(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0) &= C_s F_{npq}(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0) \\ |S_{pq}(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0)|^2 &= |C_s|^2 |F_{npq}(\underline{\mathbf{i}}_0, \underline{\mathbf{r}}_0)|^2 \end{aligned}$$

Come volevasi dimostrare.

□

B.2.2.4 Diffusione e.m. di Rayleigh

Si consideri una **particella sferica** di materiale dielettrico dissipativo nello spazio libero e di dimensioni molto minori della lunghezza d'onda del campo incidente, ovvero **eletttricamente piccola**. A causa delle piccole dimensioni della sfera, il campo elettrico all'interno può considerarsi costante e pari al campo nel caso elettrostatico (caso limite di λ infinita, ovvero frequenza tendente a zero).

Campo interno di particella sferica elettricamente piccola. È noto dall'elettrostatica che se una sferetta di costante dielettrica relativa ϵ_r rispetto al vuoto è immersa in un campo uniforme \underline{E}_i , all'interno della sfera il campo è anche uniforme e vale con riferimento alla Fig. B.2.6:

$$\underline{E}(\underline{r}') = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \underline{E}_i = \frac{3}{\epsilon_r + 2} E_i \underline{e}_{0i}$$

Dimostrazione: campo interno.

Nel caso di campo incidente uniforme, avremo una distribuzione equivalente di corrente indotta elementare ed il campo di diffusione prodotto è fornito pertanto dalla nota soluzione per il dipolo di Hertz di momento $I_0 l$ dove per $kr \ll 1$ prevalgono i termini $(1/kr)^2$:

$$\underline{E}_{\infty}(\underline{i}) \cong \frac{j\omega\mu_0 I_0 l}{4\pi r} \frac{1}{(\epsilon_r)^2} (\underline{r}_0 2 \cos \theta + \underline{\theta}_0 \sin \theta) = E_s (\underline{r}_0 2 \cos \theta + \underline{\theta}_0 \sin \theta)$$

Supponiamo il campo incidente \underline{E}_i diretto lungo \underline{z}_0 ed il campo interno \underline{E} nella particella di dimensioni infinitesime costante e parallelo ad esso (a simmetria sferica indipendente da φ). In coordinate sferiche:

$$\begin{aligned} \underline{E}_i(\underline{i}_0) &= \underline{z}_0 E_i = (\underline{r}_0 \cos \theta - \underline{\theta}_0 \sin \theta) E_i; & \underline{E} &= E (\underline{r}_0 \cos \theta - \underline{\theta}_0 \sin \theta); \\ \underline{E}_s &= E_s (\underline{r}_0 \cos \theta + \underline{\theta}_0 \sin \theta); \end{aligned}$$

Imponendo sulla superficie della particella la continuità delle componenti tangenziali (lungo $\underline{\theta}_0$) del campo elettrico e della componente normale (lungo \underline{r}_0) del vettore induzione elettrica si risolve per il campo interno:

$$\begin{aligned} \begin{cases} -E_i \sin \theta + E_s \sin \theta = -E \sin \theta \\ \epsilon_0 E_i \cos \theta + \epsilon_0 E_s 2 \cos \theta = \epsilon_0 \epsilon_r E \cos \theta \end{cases} & \begin{cases} -E_i + E_s = -E \\ E_i + 2E_s = \epsilon_r E \end{cases}; \\ \Rightarrow E_i + 2E_s = \epsilon_r E + 2E & \Rightarrow E = \frac{3}{2 + \epsilon_r} E_i \end{aligned}$$

Come volevasi dimostrare.

□

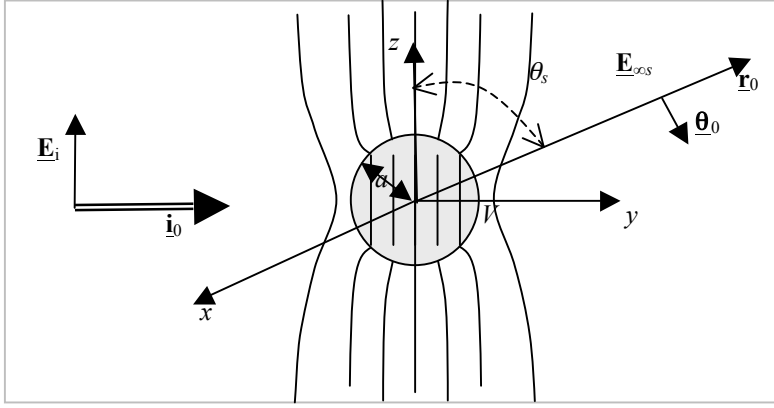


FIGURA B.2.6 Diffusione di radiazione e.m. nell'approssimazione di Rayleigh.

Campo e.m. diffuso di Rayleigh. Introducendo l'espressione del campo interno nella rappresentazione integrale dell'ampiezza di diffusione \underline{E}_s la funzione integranda è costante e $r'/\lambda \ll 1$:

$$\underline{E}_s(\mathbf{i}_0, \mathbf{r}_0) = - \int_V [\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_0 \times \underline{E}(\mathbf{r}')] [\epsilon_r(\mathbf{r}') - 1] e^{jk\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}'} dV' \cong - \int_V [\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_0 \times \underline{E}] [\epsilon_r - 1] dV'$$

e si ottiene per il modulo, se $\underline{E}_i = E_i \mathbf{e}_{0i}$:

$$|\underline{E}_s(\mathbf{i}_0, \mathbf{r}_0)| = \left| - \int_V \left[\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_0 \times \frac{3}{\epsilon_r + 2} \mathbf{e}_{0i} \right] [\epsilon_r(\mathbf{r}') - 1] e^{jk\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}'} dV' E_i \right| = \frac{3(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 2} V |\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_0 \times \mathbf{e}_{0i}| |E_i|$$

dove θ_s è l'angolo tra la direzione di osservazione \mathbf{r}_0 e il versore di polarizzazione del campo elettrico incidente \mathbf{e}_{0i} . Dalla seguente considerazione vettoriale:

$$|\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_0 \times \mathbf{e}_{0i}| = |\mathbf{r}_0 \times (\sin \theta_s) \mathbf{e}_{0\perp}| = |\sin \theta_s (\mathbf{r}_0 \times \mathbf{e}_{0\perp})| = |\sin \theta_s [\sin(\pi/2)]| = \sin \theta_s$$

si ottiene:

$$|\underline{E}_s(\mathbf{i}_0, \mathbf{r}_0)| = \frac{3(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 2} V (\sin \theta_s) E_i$$

Il piano individuato dai versori \mathbf{r}_0 e \mathbf{e}_{0i} si dice **piano di diffusione**. È interessante notare come il vettore $(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_0 \times \mathbf{e}_{0i})$, che determina la polarizzazione del campo e.m. diffuso, appartenga allo stesso piano di diffusione. Ciò implica che le componenti cross-polari siano nulle. In forma matriciale, sovrapponendo i risultati per una campo incidente polarizzato verticalmente (lungo z) $\underline{E}_i = E_{iz} \mathbf{z}_0$ e polarizzato orizzontalmente (lungo x) $\underline{E}_i = E_{ix} \mathbf{x}_0$, si ottiene la matrice complessa di polarizzazione:

$$\begin{bmatrix} E_{sb}(\mathbf{r}) \\ E_{sw}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = C_s \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \begin{bmatrix} F_{nb}(\mathbf{i}_0, \mathbf{r}_0) & 0 \\ 0 & F_{mw}(\mathbf{i}_0, \mathbf{r}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ib} \\ E_{iw} \end{bmatrix} = \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \begin{bmatrix} S_{bb}(\mathbf{i}_0, \mathbf{r}_0) & 0 \\ 0 & S_{ww}(\mathbf{i}_0, \mathbf{r}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ib} \\ E_{iw} \end{bmatrix}$$

dove

$$F_{nbh}(\mathbf{i}_0, \mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{F}_s(\mathbf{i}_0, \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{h}_{0s}}{E_{ih}} = \frac{3(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r + 2} V E_{ih} \frac{(-\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_0 \times \mathbf{x}_0)}{E_{ih}} \cdot \mathbf{h}_{0s}$$

$$F_{mvr}(\mathbf{i}_0, \mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{F}_s(\mathbf{i}_0, \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{v}_{0s}}{E_{iv}} = \frac{3(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r + 2} V E_{iv} \frac{(-\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_0 \times \mathbf{z}_0)}{E_{iv}} \cdot \mathbf{v}_{0s}$$

in cui valgono:

$$-\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_0 \times \mathbf{x}_0 = -\mathbf{r}_0(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{x}_0) + \mathbf{x}_0(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_0) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{r}_0 \sin \theta_s \cos \varphi_s$$

$$-\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_0 \times \mathbf{z}_0 = -\mathbf{r}_0(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{z}_0) + \mathbf{z}_0(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_0) = \mathbf{z}_0 - \mathbf{r}_0 \cos \theta_s$$

Nella direzione di retrodiffusione, per esempio nella direzione di $-\mathbf{v}_0$, si porrà $\theta_s = 90^\circ$ e $\varphi_s = 270^\circ$, per cui per $\mathbf{E}_{\infty s} = E_{\infty sh} \mathbf{x}_0$ e $\mathbf{E}_{\infty s} = E_{\infty sv} \mathbf{z}_0$ (ovvero $\mathbf{h}_{0s} = \mathbf{x}_0$ e $\mathbf{h}_{0s} = \mathbf{z}_0$):

$$F_{nbh}(\mathbf{i}_0, -\mathbf{i}_0) = \frac{\mathbf{F}_s(\mathbf{i}_0, -\mathbf{i}_0) \cdot \mathbf{h}_{0s}}{E_{ih}} = \frac{3(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r + 2} V = \frac{S_{bh}(\mathbf{i}_0, -\mathbf{i}_0)}{C_s}$$

$$F_{mvr}(\mathbf{i}_0, -\mathbf{i}_0) = \frac{\mathbf{F}_s(\mathbf{i}_0, -\mathbf{i}_0) \cdot \mathbf{v}_{0s}}{E_{iv}} = \frac{3(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r + 2} V = \frac{S_{mv}(\mathbf{i}_0, -\mathbf{i}_0)}{C_s}$$

dove i termini F_{nbv} e F_{mrb} sono nulli.

Sezioni di interazione e.m. di Rayleigh. Dal risultato precedente, la **sezione di diffusione bistatica co-polare** in polarizzazione pp , espressa da:

$$\sigma_{pp}(\mathbf{i}_0, \mathbf{r}_0) = 4\pi \frac{r^2 P_{\infty pp}(\mathbf{r}_0)}{P_{ip}(\mathbf{i}_0)} = 4\pi |C_s|^2 |F_{npp}(\mathbf{i}_0, \mathbf{r}_0)|^2 = 4\pi |S_{pp}(\mathbf{i}_0, \mathbf{r}_0)|^2$$

vale quindi, essendo $C_s = k^2/4\pi$:

$$\sigma_{pp}(\mathbf{i}_0, \mathbf{r}_0) = 4\pi \frac{k^4}{(4\pi)^2} \left| \frac{3(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r + 2} \right|^2 V^2 \sin^2 \theta_s$$

Il diagramma di reirradiazione della particella ha pertanto una dipendenza del tipo $\sin^2 \theta_s$ dalla direzione di osservazione, analoga a quella dell'intensità di radiazione di un dipolo di Hertz. Infatti, le correnti equivalenti \mathbf{J}_{eq} nel volume V sono assimilabili ad una distribuzione di dipoli elementari (di Hertz) tutti paralleli al campo incidente. Il massimo del campo diffuso si ha nelle direzioni in avanti (forward) e all'indietro (backward). La sezione trasversa di diffusione bistatica di una particella piccola rispetto a λ è inversamente proporzionale, quindi, alla quarta potenza della lunghezza d'onda e direttamente proporzionale al quadrato del volume. La diffusione da piccola particella avente queste proprietà viene in genere denominato diffusione e.m. di Rayleigh.

La **sezione di retrodiffusione di Rayleigh** si ottiene per il valore di σ_{pp} quando $\theta_s = 90^\circ$ e $\varphi_s = 270^\circ$:

$$\sigma_{bpp}(\mathbf{i}_0, -\mathbf{i}_0) = \sigma(\theta_s = 90^\circ, \varphi_s = 270^\circ) = 4\pi \frac{k^4}{(4\pi)^2} \left| \frac{3(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r + 2} \right|^2 \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right)^2 = 4\pi k^4 \left| \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r + 2} \right|^2 a^6$$

Se $D=2a$ è il diametro della particella si ottiene la relazione molto utilizzata in radar meteorologia:

$$\sigma_{bpb}(\mathbf{i}_0, -\mathbf{i}_0) = 4\pi \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 \left| \frac{(\epsilon_{rc} - 1)}{\epsilon_{rc} + 2} \right|^2 \left(\frac{D}{2} \right)^6 = \left| \frac{(\epsilon_{rc} - 1)}{\epsilon_{rc} + 2} \right|^2 \frac{\pi^5}{\lambda^4} D^6 = |K_\epsilon|^2 \frac{\pi^5}{\lambda^4} D^6$$

dove K_ϵ è il fattore dielettrico complesso. Si noti che per la retrodiffusione, come anticipato, risulta $\sigma_{bbb} = \sigma_{bvv}$, a causa della simmetria sferica del corpo.

La **sezione trasversa di diffusione** di una particella elettricamente piccola vale, quindi:

$$\begin{aligned} \sigma_{spb}(\mathbf{i}_0) &= \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \sigma_{pb}(\mathbf{i}_0, \mathbf{r}_0) d\Omega_s = \frac{k^4}{(4\pi)^2} \left| \frac{3(\epsilon_{rc} - 1)}{\epsilon_{rc} + 2} \right|^2 V^2 \int_{4\pi} \sin^2 \theta_s d\Omega_s = \\ &= \frac{k^4}{(4\pi)^2} \left| \frac{3(\epsilon_{rc} - 1)}{\epsilon_{rc} + 2} \right|^2 V^2 \int_0^{2\pi} d\phi_s \int_0^\pi \sin^2 \theta_s \sin \theta_s d\theta_s = \frac{k^4}{(4\pi)^2} \left| \frac{3(\epsilon_{rc} - 1)}{\epsilon_{rc} + 2} \right|^2 V^2 \left(2\pi \frac{4}{3} \right) \end{aligned}$$

Con semplici passaggi algebrici si ottiene¹⁰:

$$\sigma_{spb}(\mathbf{i}_0) = \frac{1}{16\pi^2} \frac{16\pi^4}{\lambda^4} \frac{72\pi}{3} \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right)^2 \left| \frac{\epsilon_{rc} - 1}{\epsilon_{rc} + 2} \right|^2 = \frac{32\pi^4 a^6}{\lambda^4} \left| \frac{\epsilon_{rc} - 1}{\epsilon_{rc} + 2} \right|^2 = 32\pi^4 \frac{a^6}{\lambda^4} |K_\epsilon|^2$$

Il rapporto tra sezione trasversa di diffusione e sezione geometrica di una particella sferica, detta **efficienza di diffusione**, è quindi proporzionale alla quarta potenza del prodotto ka , ovvero del rapporto a/λ :

$$\xi_{spb}(\mathbf{i}_0) = \frac{\sigma_{spb}(\mathbf{i}_0)}{A_g} = \frac{\sigma_{spb}(\mathbf{i}_0)}{\pi a^2} = \frac{32\pi^4 a^4}{\pi \lambda^4} \left| \frac{\epsilon_{rc} - 1}{\epsilon_{rc} + 2} \right|^2 = 32\pi^3 \frac{a^4}{\lambda^4} \left| \frac{\epsilon_{rc} - 1}{\epsilon_{rc} + 2} \right|^2$$

Per la **sezione trasversa di assorbimento** e il suo valore normalizzato alla sezione geometrica (efficienza di assorbimento) si ottengono, poi:

$$\begin{aligned} \sigma_{app}(\mathbf{i}_0) &= \frac{1}{2P_i} \int_V \omega \epsilon_0 \epsilon_{rc} |\underline{\mathbf{E}}(r')|^2 dV' = \frac{1}{2 \frac{1}{2\eta} |E_i|^2} \int_V \omega \epsilon_0 \epsilon_{rc} \left| \frac{3}{\epsilon_{rc} + 2} E_i \right|^2 dV' = \\ &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \omega \epsilon_0 \epsilon_{rc} \left| \frac{3}{\epsilon_{rc} + 2} \right|^2 V = k \epsilon_{rc} \left| \frac{3}{\epsilon_{rc} + 2} \right|^2 V = \frac{4\pi}{3} k \epsilon_{rc} \left| \frac{3}{\epsilon_{rc} + 2} \right|^2 a^3 \end{aligned}$$

Quindi, in termini di diametro D , si ha:

$$\sigma_{app}(\mathbf{i}_0) = \frac{\pi^2}{3} \epsilon_{rc} \left| \frac{3}{\epsilon_{rc} + 2} \right|^2 \frac{D^3}{\lambda}$$

¹⁰Si considerino fra le altre le seguenti relazioni: $\int_0^\pi \sin^3 \chi d\chi = 4/3$; $V = 4\pi a^3/3$

e, analogamente per l'efficienza di assorbimento:

$$\xi_{app}(\mathbf{i}_0) = \frac{\sigma_{app}(\mathbf{i}_0)}{A_g} = \frac{\sigma_{app}(\mathbf{i}_0)}{\pi a^2} = \frac{4}{3} k \epsilon_r \left| \frac{3}{\epsilon_r + 2} \right|^2 a$$

La sezione trasversa di estinzione σ_{app} è esprimibile, quindi, dalla somma delle due espressioni ricavate per σ_{spp} e σ_{app} .

B.3 Complementi di Antenne lineari

Gli argomenti trattati nell'Appendice B.3 riguardano:

- cenni su alcune antenne lineari filiformi non rettilinee, evidenziandone i principi di funzionamento e le proprietà radiative in modo qualitativo;
- elementi sulle antenne lineari a larga banda e cenni su alcune tecniche di adattamento di impedenza.

B.3.1 Antenne lineari non rettilinee

Verranno illustrate brevemente, utilizzando in modo qualitativo i concetti esposti nel Cap. 3, le seguenti antenne lineari non rettilinee di uso comune:

- Antenna rombica (in inglese, *rhombic antenna*)
- Antenna lineare a V (in inglese, *V antenna*)
- Antenna a diedro (in inglese, *diedral antenna*)
- Antenna a portello (in inglese, *turnstile antenna*)
- Antenne a telaio (in inglese, *loop antennas*)

B.3.1.1 Antenna rombica

Le *antenne rombiche* sono utilizzate nel campo delle onde corte (HF: 3-30 MHz) per propagazione ionosferica. Sono costituite da quattro conduttori non risonanti a onda progressiva, disposti secondo i lati di un rombo parallelamente alla superficie. Sono alimentati ad un vertice e chiusi all'altro vertice su una resistenza di carico (si veda la figura B.3.1).

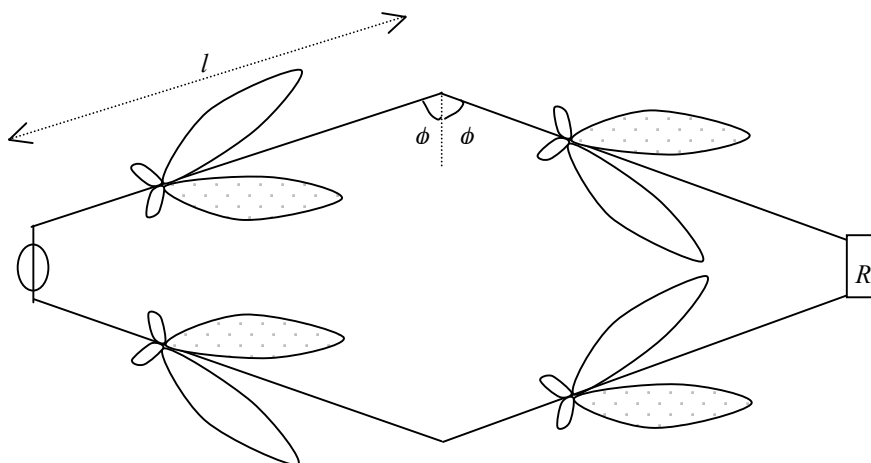


FIGURA B.3.1 Schema di antenna rombica.

Il loro **diagramma di radiazione** si ottiene considerando la combinazione delle intensità di radiazione di quattro antenne a onda progressiva di lunghezza l , viste in precedenza. In figura B.3.2, si riporta una vista dall'alto dell'antenna supponendo la coordinata z (altitudine) uscente dal foglio (piano azimutale).

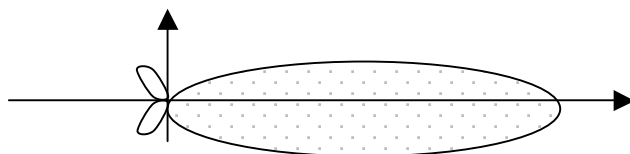


FIGURA B.3.2 Diagramma di radiazione qualitativo di antenna rombica.

La **resistenza di carico** R_L è scelta in modo da essere uguale alla resistenza caratteristica della linea di trasmissione per realizzare linee adattate (non risonanti). Scegliendo opportunamente la lunghezza l dei conduttori e l'angolo 2ϕ tra di essi, è possibile fare sì che un lobo di ogni conduttore a onda progressiva sia diretto lungo la diagonale maggiore del rombo e risulti in fase con gli altri. In tal modo, i lobi diretti lungo la diagonale maggiore si sommano, mentre gli altri tendono a compensarsi dando complessivamente una radiazione trascurabile. L'antenna rombica viene generalmente posta a una distanza dell'ordine di $\lambda/2$ o λ dal terreno.

Il suo diagramma di radiazione sarà influenzato dall'antenna immagine e nel piano verticale il lobo principale risulterà inclinato rispetto al suolo. A titolo esemplificativo, per $l=4\lambda$ si ha un valore ottimo di $\phi=60-65^\circ$ con un guadagno massimo pari a 40. L'**efficienza di antenna** è deteriorata dalla potenza dissipata nel carico resistivo (che per linee bifilari deve essere dell'ordine di diverse centinaia di Ohms). Tuttavia, l'antenna rombica presenta una discreta larghezza di banda, ovvero le sue prestazioni non si deteriorano fino a una frequenza che è la metà del valore ottimo.

B.3.1.2 Antenna lineare a V

L'*antenna lineare a V* è costituita da due conduttori risonanti divergenti lunghi $l > \lambda$ (si veda la figura B.3.3). Ricordando i diagrammi delle antenne a dipolo non caricato per $l > \lambda$, il diagramma di radiazione di ciascuno dei due conduttori è del tipo toroidale.

Scelto l , è possibile ricavare un angolo di divergenza ϕ tale che i lobi lungo i lati a V si sommino nella direzione dell'asse elettrico dell'antenna (in analogia all'antenna rombica). Per esempio, se $l = 2\lambda$ il valore di ϕ per cui ciò avviene è 12° . Il diagramma bidirezionale che si ottiene può essere reso direzionale con un piano riflettore. Con tale antenna si ottengono guadagni relativamente elevati (dell'ordine di 10 dB) nella banda HF (30-300 MHz).

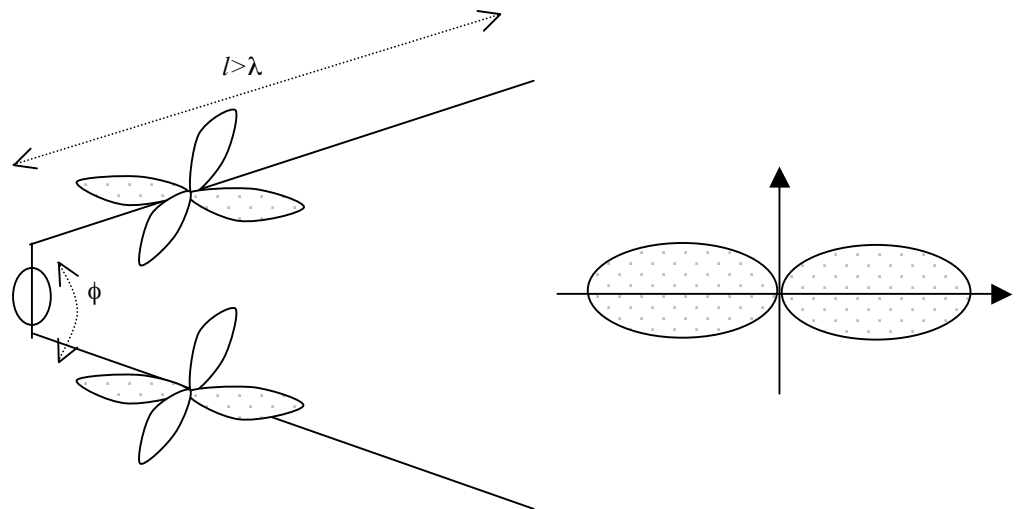


FIGURA B.3.3. Diagramma qualitativo di radiazione di antenna a V.

B.3.1.3 Antenna a diedro

L'*antenna a diedro* è costituita da un dipolo ripiegato a semionda posto nel piano bisettore di un diedro (riflettore), realizzato da conduttori paralleli al dipolo stesso. Il diagramma che si ottiene è quello del dipolo ripiegato, ma unidirezionale a causa del piano conduttore riflettore (si veda la figura B.3.4).

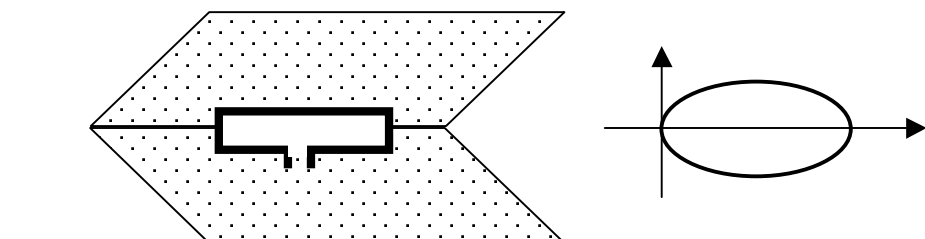


FIGURA B.3.4. Schema e diagramma qualitativo di radiazione di antenna a diedro.

L'efficacia del **piano riflettore** realizzato a fili è adeguata se la distanza d tra i fili è tale che $d < \lambda/2$. Infatti, per campi e.m. polarizzati parallelamente ai fili, coppie di fili appariranno come una guida d'onda la cui lunghezza d'onda di taglio è $\lambda_c = 2d$. Per $\lambda > \lambda_c$, l'onda e.m. incidente sarà riflessa dal riflettore in quanto in condizioni di guidaggio (sopra-taglio), mentre per $\lambda < \lambda_c$, l'onda e.m. sarà trasmessa attraverso il riflettore (condizioni di sotto-taglio). Si noti che per un'onda polarizzata ortogonalmente alla direzione dei fili il piano risulterà sempre elettromagneticamente trasparente.

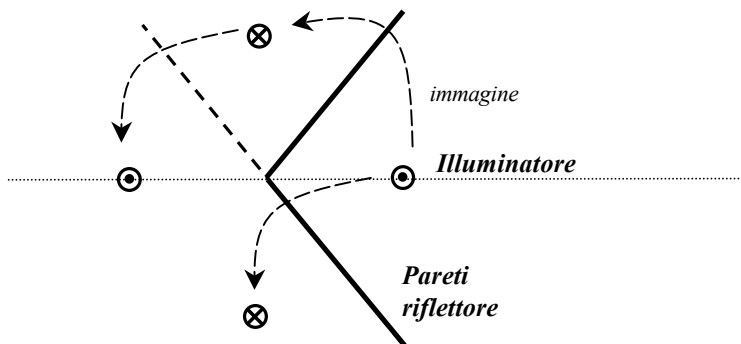


FIGURA B.3.5. Schema di analisi di antenna a diedro.

Se l'angolo fra i due semipiani del diedro è 90° e la distanza tra i conduttori è $d < \lambda/10$ si può applicare il teorema delle immagini due volte come indicato nella figura B.3.5. Si considera prima un piano metallico illimitato in corrispondenza della parete superiore che genera una immagine di segno opposto delle correnti dell'illuminatore, e poi un ulteriore piano ortogonale che genera una immagine di segno opposto della corrente nell'illuminatore, ma anche l'immagine della precedente immagine, di segno concorde con la corrente dell'illuminatore. Se la distanza del dipolo dal vertice è pari a $\lambda/2$ (quindi, λ tra l'antenna e la sua immagine nel piano azimutale) si osserva che i contributi delle tre immagini al campo sull'asse del diedro sono tutti in fase e si ottengono guadagni di circa 12 dB, che aumentano se si riduce ulteriormente l'angolo del diedro. Si noti che il dipolo ripiegato a semionda in spazio libero presenta un guadagno di circa 2.1 dB. Tale antenna trova applicazioni in banda VHF e UHF.

B.3.1.4 Antenna a portello

L'**antenna a portello** è un'antenna largamente impiegata nelle radiodiffusione televisiva nelle bande VHF e UHF. È costituita da due dipoli a semionda, posti nello stesso piano (piano azimutale posto orizzontalmente), perpendicolari tra loro e alimentati da due tensioni V_a e V_b in quadratura (sfasate di 90°). La struttura è indicata in figura B.3.6.

Poiché i due campi irradiati da i due dipoli ortogonali sono in quadratura, il campo totale sarà dato da:

$$E(\underline{r}, t) = \text{Re}[(E_A(\underline{r}) + E_B(\underline{r})e^{j\pi/2})e^{j\omega t}] = \text{Re}[E_A(\underline{r})]\cos\omega t + \text{Re}[E_B(\underline{r})]\sin\omega t$$

da cui il modulo:

$$|E(\underline{r}, t)| = \sqrt{\text{Re}[E_A(\underline{r})]^2 + \text{Re}[E_B(\underline{r})]^2}$$

La risultante è il **diagramma di radiazione** riportato in figura, in cui si è accentuata la omnidirezionalità nel piano azimutale contenente i due dipoli. I dipoli a semionda vengono realizzati con tubi di rilevante diametro in modo da allargare la banda di frequenza (si rammenti la discussione sulle antenne a larga banda). Inoltre, per aumentare la direttività nel piano zenitale (piano verticale non mostrato), si allineano più antenne a portello a distanza di $\lambda/2$ (a al proposito si rimanda al capitolo sugli allineamenti).

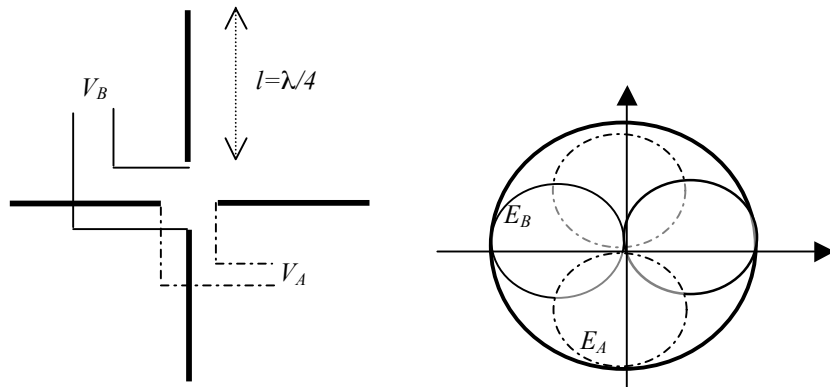


FIGURA B.3.6. Diagramma qualitativo di radiazione di antenna a portello.

B.3.1.5 Antenna a telaio

Le **antenne a telaio** sono antenne costituite da una o più spire di forma diversa (ad esempio, circolare, quadrata, rettangolare, etc.) e per questo dette anche **antenna a spira** (si veda la figura B.3.7). Se le dimensioni sono relativamente piccole rispetto alla lunghezza d'onda (cioè, se $2a < \lambda/50$ con $2a$ dimensione massima della spira), il telaio può essere assimilato a un dipolo magnetico di corrente costante con impedenza di ingresso di tipo induttivo (si veda il dipolo magnetico). Tali antenne possono essere accordate mediante l'inserzione di un condensatore alla frequenza di risonanza. Se invece le dimensioni diventano comparabili con λ , la corrente sul telaio non può più assumersi costante, con conseguenti modifiche delle caratteristiche radiative dell'antenna rispetto a quelle di un dipolo magnetico.

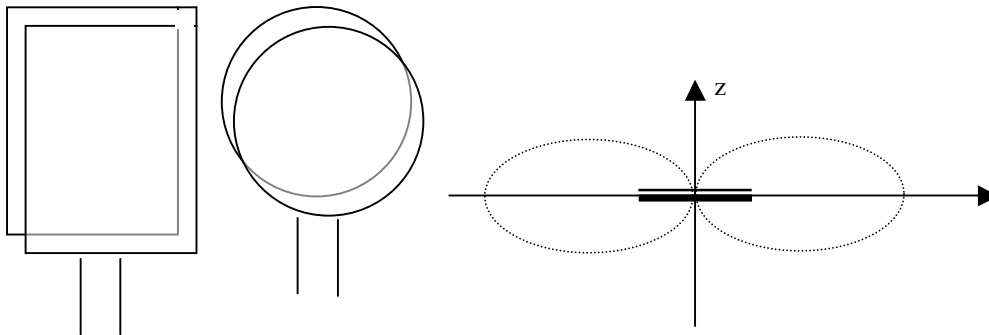


FIGURA B.3.7. Schemi e diagramma qualitativo di radiazione di antenne a telaio.

Si ricorda che il diagramma di radiazione di un dipolo magnetico elementare è identico a quello di un dipolo elettrico elementare. In particolare, per un solenoide con un numero N_s di spire, l'intensità di radiazione normalizzata e la lunghezza elettrica equivalente massima sono pari a:

$$[B.3.2] \quad U_n(\theta, \varphi) = \sin^2 \theta \quad ; \quad h_M = jN_s \frac{2\pi}{\lambda} S$$

essendo S la superficie della spira. In figura B.3.7 è rappresentato il diagramma nel piano zenitale, ovvero su piani ortogonali alla superficie della spira.

Il fatto che, in generale, h risulti inversamente proporzionale a λ motiva lo scarso uso delle antenne a telaio in banda HF e inferiori (visto che $\lambda > 10$ m) sia in ricezione che trasmissione. A radiofrequenza l'uso di antenne a spira è indicato in ricezione quando la bassa efficienza di radiazione è secondaria rispetto ai requisiti sul rapporto segnale-rumore. Per aumentare l'efficienza delle antenne a telaio, esistono realizzazioni in cui il solenoide viene avvolto in un sostegno a ferrite (*ferrite loop*), il cui scopo è quello di aumentare il flusso del campo magnetico attraverso la spira e, quindi, la lunghezza elettrica equivalente.

B.3.2 Antenne lineari a larga banda e adattamento

Verranno illustrate brevemente le seguenti *antenne lineari a larga banda*, caratterizzate da bande di frequenza relativamente ampie:

- a) Dipoli a larga banda (in inglese, *broadband dipoles*);
- b) Antenne a elica (in inglese, *helical antenna*);
- c) Antenne biconiche (in inglese, *biconical antennas*).

In seguito, verranno inserite in questa classe anche le antenne log-periodiche, che possono essere definite allineamenti di dipoli a geometria variabile con prestazioni,

in teoria, indipendenti dalla frequenza. Tali antenne trovano vasta applicazione nelle tecniche di misure di parametri di antenna. Il principio delle antenne a larga banda è quello di aumentare, a parità di dimensioni lineari, le dimensioni trasverse dell'antenna, sia aumentando la sezione dei conduttori che modificandone la forma per renderla, in generale, conica. Ciò può essere realizzato in diversi modi, anche sfruttando la realizzazione di superfici conduttrici attraverso strutture filiformi.

Verrà, infine, dato un cenno sulle tecniche di adattamento di antenne lineari a linee di trasmissione sia bilanciate (mediante trasformatori) che sbilanciate (mediante adattori *BalUn*).

B.3.2.1 Dipoli a larga banda

L'andamento della **resistenza e reattanza** dell'impedenza Z_a di antenne a dipolo caricato è richiamato nella figura seguente. Il grafico mostra come anche R_a sia legata al raggio a dell'antenna quando la lunghezza diviene comparabile con λ . Anche la parte reattiva X_a dipende in maniera significativa da a . Si nota come in corrispondenza della risonanza serie con l di poco inferiore a $\lambda/2$, **dipoli di maggiore sezione presentano larghezza di banda** maggiori dal punto di vista della condizione di adattamento con il circuito ricetrasmittente (è maggiore l'intervallo di frequenza per cui X_i è inferiore ad una soglia prefissata).

Per dipoli con diametro $2a > 0.05\lambda$, l'andamento della corrente lungo z può non essere più di tipo sinusoidale, come ricavato in generale. Tuttavia, l'**effetto sull'intensità di radiazione è trascurabile** per cui, a fronte di un allargamento di banda, si trovano analoghi diagrammi di radiazione.

Tipiche realizzazioni, già descritte, sono i **monopoli coassiali** (in inglese, *ground-plane coaxial monopoles*), usualmente ricavate da cavi coassiali e utilizzate per comunicazioni in banda VHF e UHF sia fisse che mobili. L'elemento radiante di queste antenne è costituito dal conduttore interno del cavo coassiale, mentre il piano conduttore è collegato al conduttore esterno.

Una variante dei monopoli coassiali, utilizzata nella produzione di antenne per terminali cellulari, è il **monopolo a manica** (in inglese, *sleeve monopole*), riportato in figura B.3.8. Esso è un monopolo a $\lambda/4$, posto su una superficie circolare conduttrice in cui il conduttore esterno del cavo coassiale è interrotto in un punto distante h dalla superficie (invece che sulla superficie, cioè per $h=0$).

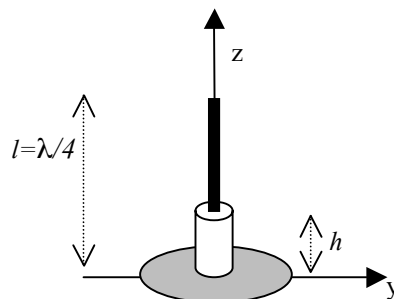


FIGURA B.3.8. Schema di monopolo a manica.

Il monopolo a manica può essere assimilato a un **dipolo a semionda con alimentazione asimmetrica**, utilizzando il teorema delle immagini. L'asimmetria dell'alimentazione conduce ad un aumento dell'impedenza di ingresso, ovvero della resistenza di radiazione nel caso di assenza di perdite nell'antenna (si veda fig. 3.8.2).

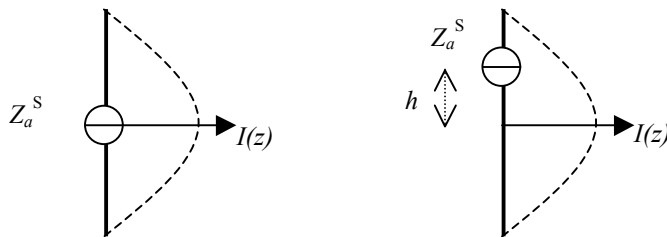


FIGURA B.3.9. Corrente su dipolo alimentato asimmetricamente.

Infatti, considerando la schematizzazione di figura e **uguagliando le potenze di ingresso** del dipolo con alimentazione simmetrica (centrale) di impedenza Z_a^S e del dipolo con alimentazione asimmetrica di impedenza Z_a^{AS} :

$$[B.3.3] \quad P_{in} = \frac{|I(z=0)|^2}{2} Z_a^S = \frac{|I(z=\Delta l)|^2}{2} Z_a^{AS}$$

Supponendo che il decentramento dell'alimentazione non modifichi sostanzialmente la distribuzione di corrente di un dipolo a semionda del tipo $I(z) = I_0 \cos(kz)$, si ricava:

$$[B.3.4] \quad Z_a^{AS} = \frac{Z_a^S}{[\cos(k\Delta l)]^2}$$

Da altro punto di vista, si consideri che a parità di potenza irradiata, la corrente di ingresso nel dipolo a semionda con alimentazione asimmetrica è inferiore a quella del dipolo con alimentazione simmetrica. Per cui, essendo la **resistenza di radiazione** R_r inversamente proporzionale al quadrato della corrente di ingresso, si giustifica il risultato ottenuto.

B.3.2.2 Antenne a elica

L'antenna a elica è un'**antenna filiforme con conduttori avvolti a forma di elica**, in genere posta su un piano conduttore (si veda figura B.3.10). È usualmente connessa al conduttore centrale di un cavo coassiale con il conduttore esterno della linea connesso al piano conduttore.

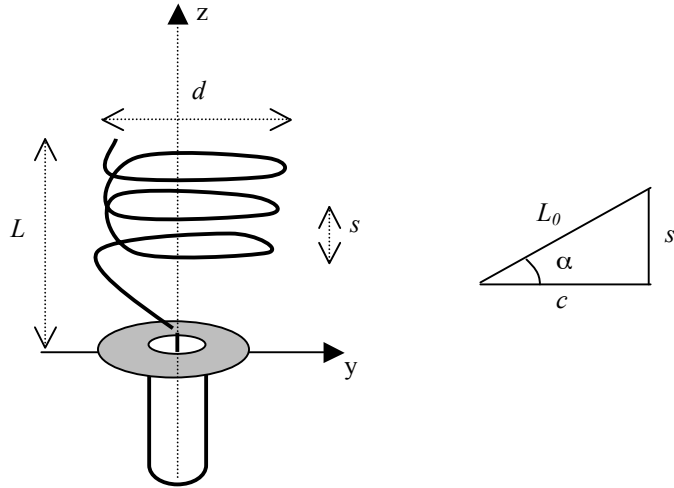


FIGURA B.3.10. Geometria di antenna a elica.

La **struttura geometrica** di un'elica consiste di N avvolgimenti, diametro d e spaziatura s tra ogni avvolgimento. La lunghezza totale dell'antenna è $L=Ns$, mentre la lunghezza totale del filo è:

$$[B.3.5] \quad L_n = NL_0 = N\sqrt{s^2 + c^2} = N\sqrt{s^2 + (\pi d)^2}$$

dove L_0 è la lunghezza del filo tra ogni avvolgimento e c è la circonferenza dell'elica. Un altro importante parametro dell'elica è l'angolo di inclinazione α definito da:

$$[B.3.6] \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{s}{c}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{s}{\pi d}\right)$$

Le **caratteristiche radiative** dell'antenna a elica si possono variare controllando i parametri geometrici rispetto alla lunghezza d'onda. L'impedenza di ingresso dipende criticamente da α e dalla dimensione a del conduttore. La **polarizzazione dell'antenna** è, in generale, ellittica anche se si possono ottenere sia la polarizzazione circolare che ellittica in diversi intervalli di frequenza.

L'utilizzo primario delle antenne a elica è, quello, in **rice-trasmissione di segnali in collegamenti satellitari** affetti da rotazione di polarizzazione Faraday dovuta all'attraversamento della ionosfera. Infatti, poiché una polarizzazione ellittica può essere scomposta in 2 componenti lineari ortogonali in quadratura, l'antenna a elica è in grado di ricevere, comunque, segnali trasmessi con una qualunque polarizzazione lineare.

L'antenna a elica può operare in due modi: a) **modo normale**, in cui il massimo di radiazione è ortogonale all'asse dell'elica; b) **modo assiale**, in cui il massimo di radiazione è parallelo all'asse dell'elica. Il secondo modo è più efficiente e consente di irradiare con polarizzazione circolare in una banda relativamente larga (ovvero, con indice di banda con rapporto fino a 2:1).

Modo normale: si ha quando l'elica ha **piccole** dimensioni rispetto a λ , e.g. $L_n = NL_0 < \lambda$ (si veda figura B.3.11). In tal caso il campo lontano irradiato dall'elica si riduce alla somma di quello dovuto ad un anello di diametro d (quando α che tende a 0°) e di un dipolo elementare di lunghezza s (quando α che tende a 90°).

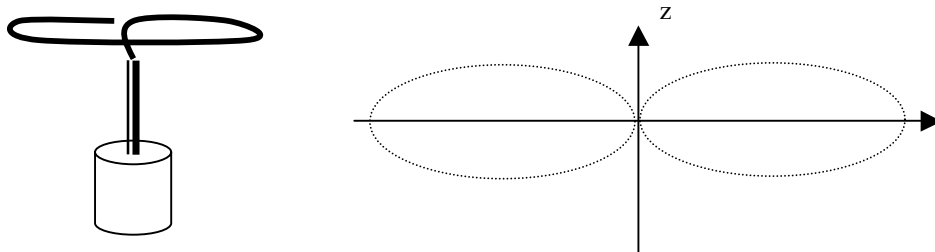


FIGURA B.3.11. Antenna a elica in modo normale e suo diagramma di radiazione.

Si dimostra che quando $\tan(\alpha) = s/\pi d = \pi d/2\lambda$, il campo irradiato è polarizzato circolarmente. La larghezza di banda non è ampia in quanto le prestazioni dipendono criticamente dalle dimensioni.

Modo assiale: si ha quando l'elica ha **grandi** dimensioni rispetto a λ , e.g. $L_n = NL_0 > \lambda$ (si veda figura B.3.12). Per realizzare la polarizzazione circolare, deve essere in condizioni ottime $\epsilon \cong \lambda$, $s \cong \lambda/4$ e $\alpha \cong 14^\circ$. Le dimensioni dell'elica non sono critiche, assicurando una discreta larghezza di banda.

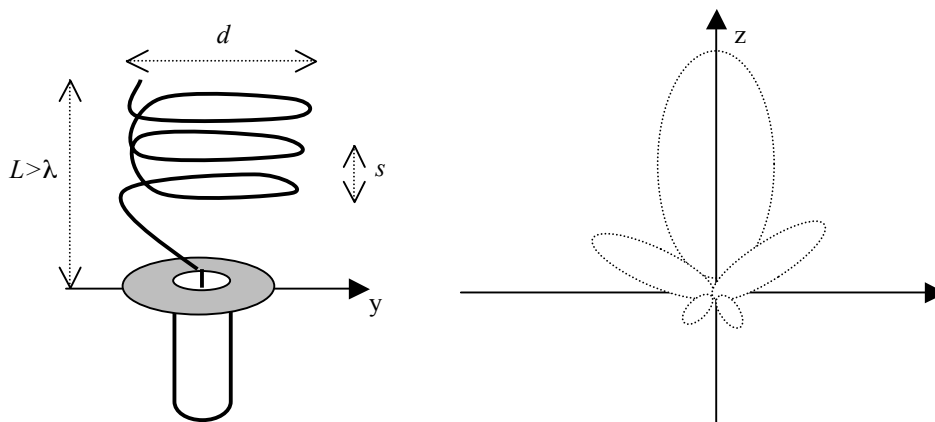


FIGURA B.3.12. Antenna a elica in modo assiale e suo diagramma di radiazione.

Un **modello equivalente** dell'elica in modo assiale è quello di un allineamento di N identiche spire con corrente non uniforme, distanziati di una lunghezza s e disposti lungo z .

Si dimostra che la **direttività massima** D_M , la **larghezza a metà potenza** Θ_{HP} del lobo principale sono pari a:

$$[B.3.7] \quad D_M \cong 15N \frac{e^2 s}{\lambda^3} \quad \& \quad \Theta_{HP} \cong \frac{115\lambda^{3/2}}{e\sqrt{Ns}}$$

L'impedenza di ingresso è tra 100 e 200 Ω . Un modo per ridurre quest'ultima (per portarla intorno a 50 Ω) è quello di aumentare la sezione del conduttore dell'elica vicino il punto di alimentazione all'altezza del piano conduttore.

B.3.2.3 Antenne biconiche

L'antenna biconica è una struttura che è realizzata da due **coni** teoricamente **di estensione infinita**, alimentati nel vertice comune (si veda figura B.3.13). Il suo equivalente può essere considerata una linea di trasmissione uniformemente divergente.

Nel caso di **coni infiniti**, è possibile condurre un'analisi rigorosa dell'antenna. Si dimostra che la resistenza di radiazione R_r è data da (essendo la linea infinita, essa risulta uguale all'impedenza caratteristica della linea in assenza di perdite):

$$[B.3.8] \quad R_r = \frac{\eta}{\pi} \ln \left[\cot \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

Nel caso di **coni finiti**, la linea equivalente può pensarsi caricata agli estremi. La larghezza di banda cresce al crescere di α , mentre il diagramma di radiazione rimane simile a quello di un dipolo.

Le caratteristiche di larga banda delle antenne biconiche con $60^\circ < \alpha < 120^\circ$ ne hanno favorito l'uso nelle bande VHF e UHF per ricezioni di segnali televisivi.

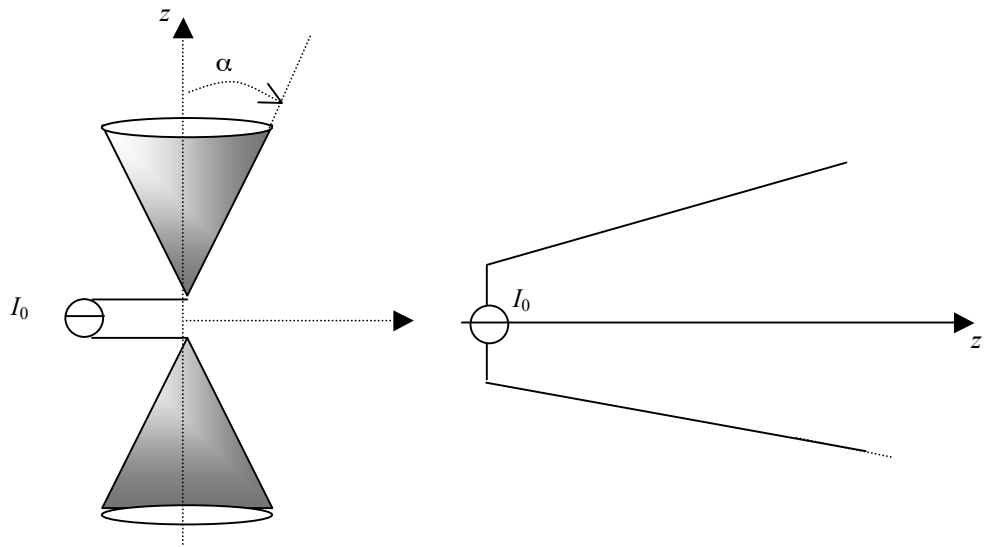


FIGURA B.3.13. Antenna biconica e linea di trasmissione non uniforme equivalente.

Realizzazioni pratiche sono basate sull'approssimazione geometrica di superfici coniche, come nelle (si veda figura B.3.14):

- a) **antenne a triangolo** (in inglese, *triangular sheet antennas*)
- b) **antenne a farfalla** (in inglese, *bow-tie antennas*).

Per rendere i diagrammi unidirezionali, le precedenti antenne vengono anche usate in ricezione insieme a piani riflettori. Inoltre, la superficie conica può essere realizzata mediante una struttura spiraliforme dando luogo ad antenne a elica spiraliforme.

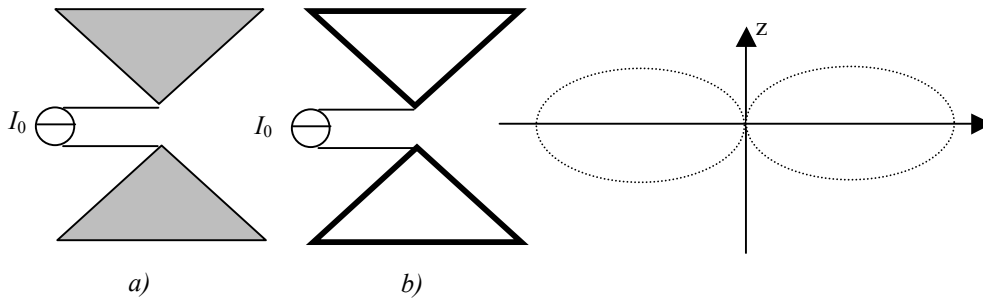


FIGURA B.3.14. Esempi di antenna biconica e diagramma qualitativo di radiazione.

B.3.2.4 Adattamento di antenne lineari a linee di trasmissione

L'operatività di un'antenna su un dato intervallo di frequenze non è completamente dipendente dalla **risposta in frequenza** dell'antenna stessa, ma piuttosto dalla combinazione del **sistema antenna e linea di trasmissione** che alimenta l'antenna. La linea ha generalmente un'impedenza caratteristica reale, mentre l'antenna ha impedenza di ingresso complessa. Inoltre, le loro variazioni con la frequenza possono essere diverse.

a) Adattamento di impedenza

Tecniche di adattamento classiche (si veda figura B.3.15) sono quelle che fanno uso di:

- adattamento mediante spezzone singolo (o multiplo) di linea in cortocircuito in parallelo (in inglese, *shunt stub matching*);

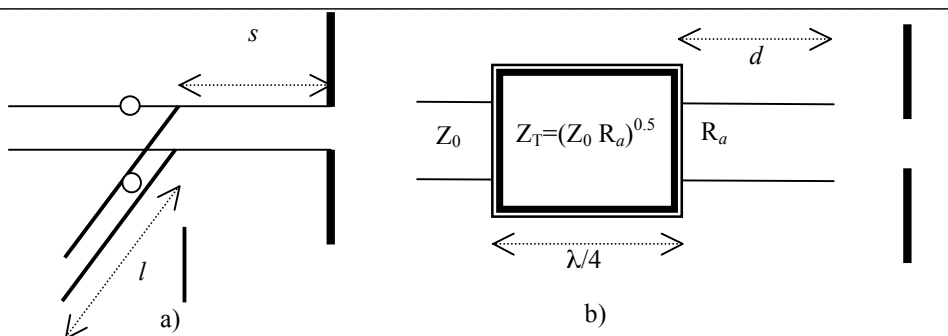


FIGURA B.3.15. Tecniche di adattamento di impedenza di antenne.

- b) trasformatori di impedenza a $\lambda/4$ a singola (o multipla) sezione (in inglese, $\lambda/4$ transformer).

Altre tecniche di adattamento in parallelo sono disponibili, quali per esempio:

- a) adattamento a T (in inglese, *T match*);
 b) adattamento a gamma (in inglese, *Gamma match*);
 c) adattamento a omega (in inglese, *Omega match*).

Mediante l'**adattamento con configurazione a T**, per esempio riportato in figura B.3.16, si realizzano le connessioni di antenne con linee bifilari, essendo un sistema simmetrico e bilanciato. Il dipolo di lunghezza l e raggio a è connesso a un altro dipolo di lunghezza l' ($l' < l$) e raggio a' , essendo separati da una distanza s .

L'analisi dell'adattamento a T generalizza le considerazioni fatte nel caso di un dipolo ripiegato (vedi Cap. 3). Infatti, se $a=a'$ e $l'=\lambda/2$, si ha che $Z_{in} \approx 4Za$. L'uso delle capacità di ingresso consente di annullare la reattanza di Z_{in} .

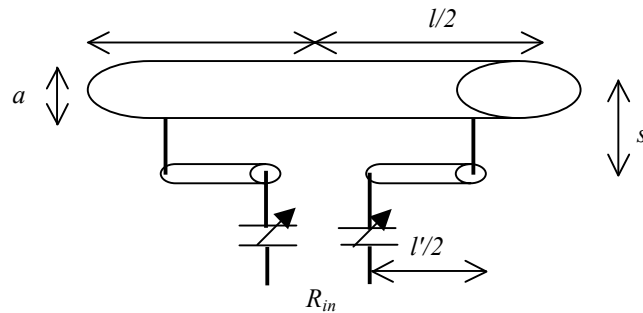


FIGURA B.3.16. Tecnica di adattamento con configurazione a T.

b) Dispositivi di sbilanciamento (BalUn)

Una linea bifilare è simmetrica, mentre un cavo coassiale è sbilanciato, cioè i suoi conduttori hanno una diversa impedenza rispetto a terra (si veda figura B.3.17). Il problema che si ha nel secondo caso è che, poiché il conduttore interno ed esterno del cavo non connessi all'antenna nello stesso modo, si possono creare flussi di corrente netta verso terra nella parte esterna del conduttore esterno del cavo.

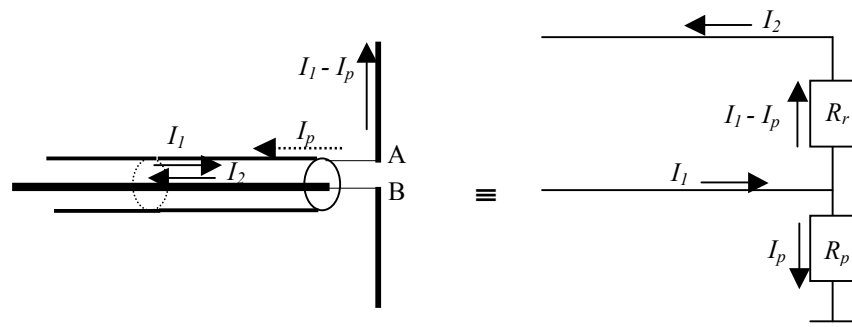


FIGURA B.3.17. Adattamento mediante dispositivo di bilanciamento (BalUn).

La corrente I_I , scorrendo sulla faccia interna del cavo coassiale, arriva alla sezione di taglio del cavo coassiale stesso. In tale sezione, però, essa non si trasferisce completamente sul conduttore dell'antenna: una parte, I_p detta corrente di perdita, a causa del taglio passa sulla faccia esterna del mantello e raggiunge la massa. Tale corrente I_p , quindi, non contribuisce all'irradiazione (si veda R_r nel circuito equivalente). Inoltre, sui 2 rami dell'antenna la corrente avrà ampiezze differenti.

Per eliminare tale corrente, occorre aumentare quanto più possibile l'impedenza tra la schermatura esterna del cavo e terra. I dispositivi usati per bilanciare i sistemi si dicono **dispositivi di sbilanciamento** (in inglese, **BalUn**: *Balanced to Unbalanced*). Esistono diversi tipi di **BalUn**, tra i quali ricordiamo:

- BalUn bazooka*;
- BalUn* coassiale a $\lambda/4$ (1:1);
- BalUn* coassiale a $\lambda/2$ (1:4).

A titolo esemplificativo, si riporta il dispositivo detto **BalUn bazooka** in figura B.3.18. L'ultima parte del cavo passa dentro un tubo metallico lungo $\lambda/4$, collegato all'estremità di sinistra al conduttore esterno del cavo, ma isolato dallo stesso all'estremità di destra. Si ha pertanto una linea lunga $\lambda/4$, in cortocircuito all'estremità di sinistra, e che quindi presenta un'impedenza infinita a radiofrequenza all'estremità di destra. I punti A e B possono, quindi, assumere tensioni simmetriche rispetto a terra.

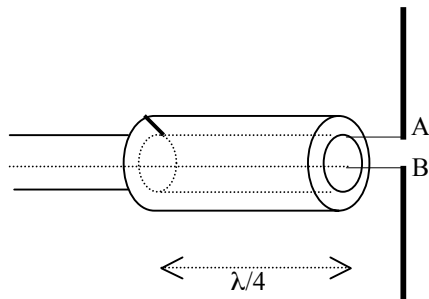


FIGURA B.3.18. Adattamento mediante tecnica *BalUn bazooka*.

B.4 Complementi di Antenne ad apertura e a riflettore

Gli argomenti trattati nell'Appendice B.4 riguardano:

- analisi approssimata del campo e.m. irradiato in zona vicina o di Fresnel, utile per stimare le correzioni da apportare alle espressioni di campo lontano ricavate nel Cap. 2;

- cenni su illuminatori ad alta efficienza utilizzati in varie configurazioni di antenne a riflettore;

B.4.1 Antenna in campo vicino

Consideriamo un'apertura rettangolare e calcoliamo il campo in *zona di Fresnel par assiale*, ovvero per distanze radiali r anche inferiori a D_a/λ^2 intorno all'asse z , ortogonale al piano di giacitura dell'apertura (si veda Cap. 4). In generale, in campo di vicino (in inglese, *near field*) non è più possibile fattorizzare l'espressione del campo elettrico in zona vicina rispetto alla distanza r e alle direzioni angolari (θ, φ) , per cui formalmente si ha:

$$[B.4.1] \quad \underline{\mathbf{E}}_n(r, \theta, \varphi) = C_n \frac{e^{-jkr}}{r} \underline{\mathbf{F}}_n(r, \theta, \varphi) \quad [\text{V/m}]$$

dove C_f è una costante complessa e $\underline{\mathbf{F}}_n$ è la funzione vettoriale di radiazione in zona di Fresnel dipendente anche da r (si confronti con l'eq. [1.3] del Cap. 1). Ne discende che non sia più possibile definire la funzione intensità di radiazione $U(\theta, \varphi)$ e le funzioni ad essa collegate, quali la direttività $D(\theta, \varphi)$ e l'angolo solido di radiazione $\Omega_A(\theta, \varphi)$. Inoltre, l'intensità del vettore di Poynting non varierà più con la distanza secondo la semplice legge $1/r^2$. Infatti, la dipendenza del modulo del campo elettrico $\underline{\mathbf{E}}_n$ da r è inversamente proporzionale a potenze del tipo r^m (con n intero tra 1 e 3, tipicamente, dipendente dalla geometria della sorgente).

L'espressione esplicita del campo in zona di Fresnel $\underline{\mathbf{E}}_n$ è, in genere, relativamente complicata da ottenere: ci limiteremo in questo contesto a considerare una geometria ad apertura rettangolare con illuminazione uniforme a polarizzazione lineare lungo y . Considereremo l'approssimazione al secondo ordine del termine di fase della funzione di Green (si veda Cap. 2), mentre per il modulo della funzione di Green considereremo, per semplicità, la stessa espressione utilizzata in zona di Fraunhofer con gradiente che assumeremo ancora nella direzione $\underline{\mathbf{r}}_0$.

In zona di Fresnel parassiale la direzione di osservazione è praticamente ortogonale al vettore che identifica i punti di sorgente e che giace sul piano x, y ($\underline{\mathbf{r}}_0 \cdot \underline{\mathbf{r}}' = 0$). Il termine di fase nella funzione di Green G si scrive pertanto (si veda eq. [2.62] del Cap. 2):

$$[B.4.2] \quad \angle G \cong -jk \left[r - \underline{\mathbf{r}}_0 \cdot \underline{\mathbf{r}}' + \frac{r'^2}{2r} \right] = -jk \left[r - \underline{\mathbf{r}}_0 \cdot (x' \underline{\mathbf{x}}_0 + y' \underline{\mathbf{y}}_0) + \frac{r'^2}{2r} \right]$$

Sotto le ipotesi menzionate, la **teoria dell'apertura** in zona di Fraunhofer si estende immediatamente a questo caso, con l'unica differenza di dover conservare l'intero termine di fase della funzione di Green. Essendo l'illuminazione a polarizzazione lineare, possiamo, per semplicità, considerare la **funzione scalare di radiazione in campo vicino** F_n , fornita a partire dalla funzione scalare di illuminazione $f_j(x, y)$ (essendo si ha $f_x = 0$ e $f_y \neq 0$), dalla relazione integrale seguente, in

cui il termine di fase quadratico si aggiunge a quello lineare in \underline{r}' . Introducendo le coordinate polari (r', φ') sul piano di apertura e le coordinate sferiche per esprimere \underline{r}_0 :

$$\begin{cases} x' = r' \sin \varphi' \\ y' = r' \sin \varphi' \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \underline{r}_0 \cdot \underline{x}_0 = \sin \theta \cos \varphi \\ \underline{r}_0 \cdot \underline{y}_0 = \sin \theta \sin \varphi \end{cases}$$

la **funzione scalare di radiazione** F_n dell'apertura rettangolare è espressa da:

$$[B.4.3] \quad F_{ny}(r, \theta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_y(x', y') e^{jk \left[\sin \theta (x' \cos \varphi + y' \sin \varphi) - \frac{x'^2 + y'^2}{2r} \right]} dx' dy'$$

Si noti come effettivamente, anche sotto le ipotesi semplificative adottate, F_n non risulti più indipendente dalla distanza r del punto di osservazione.

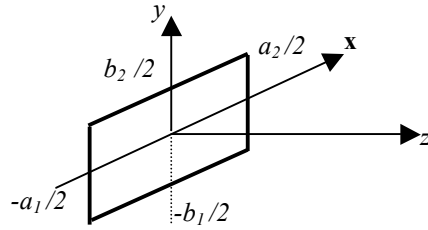


FIGURA B.4.1. Apertura rettangolare non simmetrica.

Nel caso di **illuminazione fattorizzabile** $f_y(x, y) = f_y^{(x)}(x) f_y^{(y)}(y)$, si possono fare le stesse considerazioni già fatte in zona di Fraunhofer. In particolare, la F_n in eq. [B.4.2] è riducibile al prodotto di due integrali di singola variabile:

$$F_{ny}(r, \theta, \varphi) = F_{ny}^{(x)}(r, \theta, \varphi) F_{ny}^{(y)}(r, \theta, \varphi)$$

Nel caso ulteriore di **illuminazione uniforme**, e quindi implicitamente fattorizzabile, ove $f_y(x', y')$ è una costante pari a E_0 nell'apertura e nulla al di fuori di essa, si ottiene il prodotto di due integrali di struttura identica. Se assumiamo un'apertura rettangolare asimmetrica, come in figura B.4.1, limitata lungo x dagli estremi $-a_1/2 \leq x \leq a_2/2$ e lungo y da $-b_1/2 \leq y \leq b_2/2$, la funzione scalare di radiazione in campo vicino nel caso di un'apertura rettangolare illuminata uniformemente con polarizzazione lineare diventa:

$$[B.4.4] \quad F_{ny}(r, \theta, \varphi) = E_0 \int_{-a_1/2}^{a_2/2} e^{jk \sin \theta \cos \varphi x' - jk_o \frac{x'^2}{2r}} dx' \int_{-b_1/2}^{b_2/2} e^{jk \sin \theta \sin \varphi y' - jk_o \frac{y'^2}{2r}} dy'$$

B.4.1.1 Integrali di Fresnel

Il calcolo degli integrali nell'eq. [B.4.4] è di una certa complessità; tuttavia, esso può essere formalmente semplificato ricorrendo ai cosiddetti *integrali di Fresnel*, ovvero le due funzioni seno-integrale $S(u)$ e coseno-integrale $C(u)$ per definizione date dalle espressioni:

$$[B.4.5] \quad \int_0^u e^{-j\frac{\pi}{2}u^2} du = \int_0^u \cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right) du - j \int_0^u \sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right) du = C(u) - jS(u)$$

La funzione di radiazione in campo vicino F_n , espressa dalla [B.4.4], si ricava usando le seguenti espressioni:

$$[B.4.6] \quad \begin{aligned} F_{ny}^{(x)} &= \int_{-a_1/2}^{a_2/2} e^{jk \sin \theta \cos \varphi x' - jk \frac{x'^2}{2r}} dx' = e^{j\psi_x} \sqrt{\frac{\lambda r}{2}} \{ [C(u_2) - C(u_1)] - j[S(u_2) - S(u_1)] \} \\ F_{ny}^{(y)} &= \int_{-b_1/2}^{b_2/2} e^{jk \sin \theta \sin \varphi y' - jk \frac{y'^2}{2r}} dy' = e^{j\psi_y} \sqrt{\frac{\lambda r}{2}} \{ [C(v_2) - C(v_1)] - j[S(v_2) - S(v_1)] \} \end{aligned}$$

ove le grandezze u_1, u_2, v_1, v_2 sono legate alla distanza del punto di osservazione, alla direzione di osservazione e alle dimensioni della antenna nelle due direzioni, mentre le fasi $\psi_{x,y}$ sono irrilevanti quando si calcola la direttività:

$$\begin{cases} u_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} \left(\frac{a_1}{2} + r \sin \theta \cos \varphi \right) \\ u_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda r}} \left(\frac{a_2}{2} - r \sin \theta \cos \varphi \right) \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} \left(\frac{b_1}{2} + r \sin \theta \sin \varphi \right) \\ v_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda r}} \left(\frac{b_2}{2} - r \sin \theta \sin \varphi \right) \end{cases} \quad \begin{cases} \psi_x = \frac{k}{2} r \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \\ \psi_y = \frac{k}{2} r \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \end{cases}$$

Dimostrazione: integrali di Fresnel

Limitiamoci a ricavare $F_n^{(x)}$, essendo l'altro fattore identico nella forma. Il termine di fase nella eq. (B.4.4) si trasforma aggiungendo e sottraendo una opportuna quantità:

$$\begin{aligned} jk \left[\sin \theta \cos \varphi x' - \frac{x'^2}{2r} \right] &= -\frac{jk}{2r} \left[x'^2 - 2r \sin \theta \cos \varphi x' + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \right] = \\ &= \frac{jk}{2r} r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - \frac{jk}{2r} (x' - r \sin \theta \cos \varphi)^2 \end{aligned}$$

dove si è individuato il quadrato di un binomio. Dei due addendi si noti che solo il secondo dipende dalla variabile di integrazione x' , mentre il primo è una costante. Si può scrivere, pertanto:

$$jk \left[\sin \theta \cos \varphi x' - \frac{x'^2}{2r} \right] = j\psi_x - j\frac{\pi}{2}u^2$$

avendo posto:

$$\psi_x = \frac{k}{2} r \sin^2 \theta \cos^2 \varphi; \quad \frac{\pi}{2} u^2 = \frac{k}{2r} (x' - r \sin \theta \cos \varphi)^2$$

La seconda relazione costituisce una trasformazione dalla variabile x' alla variabile u . Introdotta quest'ultima negli integrali precedenti, si ottiene:

$$\int_{-a_1/2}^{a_2/2} e^{jk \sin \theta \cos \varphi x' - jk \frac{x'^2}{2r}} dx' = e^{j\psi_x} \int_{-a_1/2}^{a_2/2} e^{-j\frac{\pi}{2} u^2} du$$

La trasformazione di variabile richiede di calcolare la relazione tra i differenziali du e dx' , ed i nuovi estremi di integrazione u_1 e u_2 :

$$u = \sqrt{\frac{k}{r\pi}} (x' - r \sin \theta \cos \varphi) = \sqrt{\frac{2}{\lambda r}} (x' - r \sin \theta \cos \varphi)$$

da cui:

$$du = \sqrt{\frac{2}{\lambda r}} dx'; \quad u_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} \left(\frac{a_1}{2} + r \sin \theta \cos \varphi \right); \quad u_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda r}} \left(\frac{a_2}{2} - r \sin \theta \cos \varphi \right)$$

Sostituendo, si ottiene la seguente espressione integrale:

$$\int_{-a_1/2}^{a_2/2} e^{jk \sin \theta \cos \varphi x' - jk \frac{x'^2}{2r}} dx' = e^{j\psi_x} \sqrt{\frac{\lambda r}{2}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-j\frac{\pi}{2} u^2} du = e^{j\psi_x} \sqrt{\frac{\lambda r}{2}} \left[\int_0^{u_2} e^{-j\frac{\pi}{2} u^2} du - \int_0^{u_1} e^{-j\frac{\pi}{2} u^2} du \right]$$

Infine, in base alle definizioni di seno-integrale e coseno-integrale di Fresnel, date nell'eq. [B.4.5], si ottiene:

$$\int_{-a_1/2}^{a_2/2} e^{jk \sin \theta \cos \varphi x' - jk \frac{x'^2}{2r}} dx' = e^{j\psi_x} \sqrt{\frac{\lambda r}{2}} \{ C(u_2) - C(u_1) - j[S(u_2) - jS(u_1)] \}$$

che è quanto si doveva dimostrare. □

B.4.1.2 Spirale di Cornu

Le funzioni $C(u)$ e $S(u)$ hanno l'andamento in figura B.4.2 per $u > 0$. Sono entrambe funzioni antisimmetriche per le quali risulta $C(-u) = -C(u)$ e $S(-u) = -S(u)$. Per u che tende a zero valgono $C(u=0) = S(u=0) = 0$, mentre per u che tende all'infinito valgono $C(u \rightarrow \infty) = 0.5$, $S(u \rightarrow \infty) = 0.5$. Se rappresentiamo in un piano i valori di $C(u)$ sulle ascisse e di $S(u)$ sulle ordinate per diversi valori di u (variabile corrente), si ottiene la curva rappresentata in figura B.4.3, detta *spirale di Cornu*.

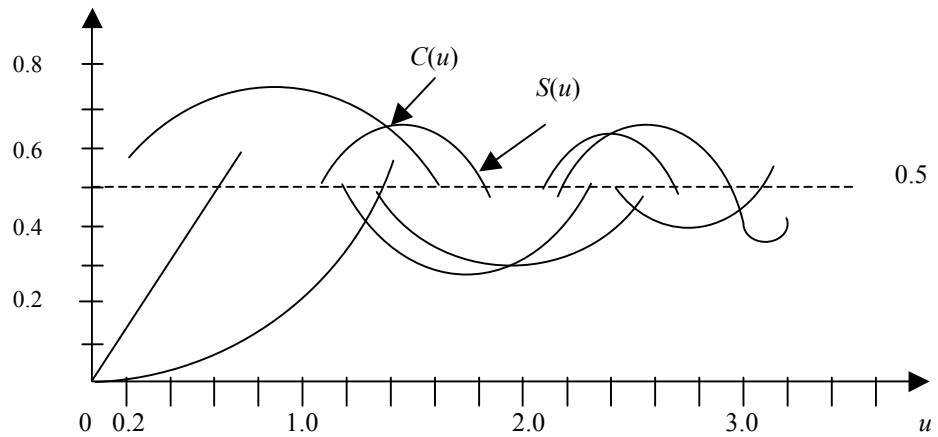


FIGURA B.4.2. Andamento delle funzioni Coseno e Seno integrale di Fresnel.

Per $u=0$ siamo nell'origine, per $u \rightarrow \infty$ nel punto $[0.5, 0.5]$ e per $u \rightarrow -\infty$ nel punto simmetrico $[-0.5, -0.5]$. Il valore massimo per $S(u)$ vale $S_{max}=0.72$ e si ottiene per $u = 1.4$; per $C(u)$ il valore massimo $C_{max}=0.75$ si ottiene per $u=1$. Sulla spirale di Cornu, i punti con massima distanza dall'origine si hanno per $u = 1.25$ e l'elongazione massima vale:

$$\max \left[\sqrt{C^2(u) + S^2(u)} \right] \cong 0.92$$

□

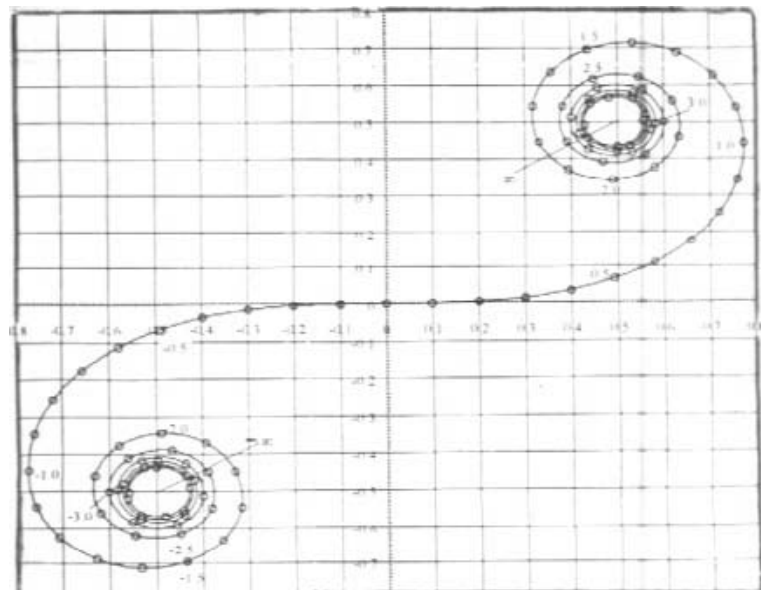


FIGURA B.4.3. Spirale di Cornu in cui il parametro corrente è la variabile u .

A partire dall'espressione per la funzione scalare di radiazione in zona di Fresnel F_n , ricavata in eq. [B.4.4] e [B.4.6], possiamo ricavare l'espressione approssimata del campo elettrico usando l'eq. [B.4.1]. Come detto, nel caso di illuminazione polarizzata linearmente lungo l'asse y , quindi, $F_x=0$ e $F_y \neq 0$ per cui $\underline{F}_n = F_{ny} \underline{y}_0$ con F_{ny} fornita dalla eq. [B.4.4]. La densità di potenza del campo irradiato sull'asse z , ovvero per $\theta=0$, può essere calcolata approssimando il campo irradiato in zona vicina come un'onda trasversa e.m. (TEM). Quindi, l'ampiezza del **vettore Poynting in zona di Fresnel** \underline{P}_n risulta fornita dall'espressione ricavata per la teoria dell'apertura in zona parassiale (si veda Cap 4):

$$[B.4.7] \quad \underline{P}_n = P_n \underline{r}_0 = \frac{1}{2\eta} |\underline{E}_n|^2 \underline{r}_0 \cong \frac{1}{2\eta} \frac{1}{\lambda^2 r^2} |F_{ny}(r, \theta, \varphi)|^2 \underline{r}_0$$

dove è stata usata l'espressione di \underline{E}_n data nell'eq. [B.4.1]. Esplicitando la funzione di radiazione scalare \underline{E}_n si ha:

$$[B.4.8] \quad P_n = \frac{P_t}{4} \left\{ [C(u_2) - C(u_1)]^2 + [S(u_2) - S(u_1)]^2 \right\} \left\{ [C(v_2) - C(v_1)]^2 + [S(v_2) - S(v_1)]^2 \right\}$$

dove $P_t = |E_0|^2 / 2\eta$ è la densità di potenza sulla bocca dell'apertura e gli estremi di integrazione valgono:

$$\begin{cases} v_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} \frac{b_1}{2} \\ v_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda r}} \frac{b_2}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} \frac{a_1}{2} \\ u_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda r}} \frac{a_2}{2} \end{cases}$$

Dimostrazione: densità di potenza in zona di Fresnel parassiale

La densità di potenza si calcola a partire dalla funzione di radiazione con le note formule della teoria dell'apertura in zona parassiale:

$$P_n = \frac{1}{2\eta} \frac{1}{r^2 \lambda^2} |F_{ny}|^2 = \frac{1}{2\eta} \frac{1}{r^2 \lambda^2} |F_{ny}^{(x)}|^2 |F_{ny}^{(y)}|^2$$

da cui utilizzando le eq. [B.4.6]:

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{2\eta} \frac{|E_0|^2}{r^2 \lambda^2} |F_{ny}^{(x)} F_{ny}^{(y)}|^2 = \frac{1}{2\eta} \frac{|E_0|^2}{r^2 \lambda^2} \cdot \\ &\cdot \left| e^{j\psi_x} \sqrt{\frac{\lambda r}{2}} \{ [C(u_2) - C(u_1)] - j[S(u_2) - S(u_1)] \} e^{j\psi_y} \sqrt{\frac{\lambda r}{2}} \{ [C(v_2) - C(v_1)] - j[S(v_2) - S(v_1)] \} \right|^2 = \\ &= \frac{|E_0|^2}{2\eta} \frac{r^2 \lambda^2}{4 r^2 \lambda^2} \{ [C(u_2) - C(u_1)]^2 + [S(u_2) - S(u_1)]^2 \} \{ [C(v_2) - C(v_1)]^2 + [S(v_2) - S(v_1)]^2 \} \end{aligned}$$

da cui quanto si doveva dimostrare. □

Le grandezze tra parentesi graffe della eq. [B.4.8] possono essere interpretate graficamente sul grafico della **spirale di Cornu**. Ciascuna di esse rappresenta il quadrato della lunghezza di un segmento che congiunge due punti sulla mappa rispettivamente corrispondenti ai valori del parametro corrente $u=u_1$ e $u=u_2$ (e analogamente per il secondo termine tra parentesi graffe funzione di v_1 e v_2). Si noti che:

- per r che tende all'infinito, dalla eq. [B.4.5] si ottiene $u_1=u_2=v_1=v_2=0$, e le lunghezze dei segmenti tra parentesi graffe vanno a zero e quindi la densità di potenza $P_n(r \rightarrow \infty, \theta, \varphi)$ è nulla, come ovvio.
- per r tendente a zero, si ottiene la lunghezza del segmento che congiunge i punti estremi della spirale tra $[-0.5, -0.5]$ e $[0.5, 0.5]$ e quindi $P_n(r \rightarrow 0, \theta, \varphi) = 1/4 P_i [\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}]^2 = P_i$, ovvero si ottiene la densità di potenza sulla apertura, risultato anche questo atteso.
- al variare delle dimensioni dell'apertura o al variare della distanza r , i due punti si muovono sulla spirale e la lunghezza del segmento di conseguenza può aumentare o diminuire. Studieremo nel paragrafo seguente il caso semplice di apertura quadrata.

B.4.1.3 Diffrazione da apertura quadrata

Nel caso particolare di apertura rettangolare simmetrica rispetto all'asse z risulta $a_1=a_2=a$ e $b_1=b_2=b$. Di conseguenza, sulla base della eq. [B.4.8], risulta $u_1=-u_2=u$ e $v_1=-v_2=v$ e per le proprietà antisimmetriche degli integrali di Fresnel:

$$[B.4.9] \quad P_n = \frac{P_i}{4} \left\{ [2C(u)]^2 + [2S(u)]^2 \right\} \left\{ [2C(v)]^2 + [2S(v)]^2 \right\} =$$

$$= 4P_i \left\{ [C(u)]^2 + [S(u)]^2 \right\} \left\{ [C(v)]^2 + [S(v)]^2 \right\}$$

In questo caso i segmenti da considerare sulla spirale di Cornu hanno un estremo nell'origine e l'altro corrente che si muove dall'origine stessa per $r \rightarrow \infty$ ($u=v=0$), fino al punto estremo $[0.5, 0.5]$ quanto r tende a zero. Si capisce, pertanto, come al diminuire di r , dapprima c'è un incremento della densità di potenza, come ci si aspetta. Quando ci troviamo ancora in zona di Fraunhofer, questo incremento segue la legge $1/r^2$. Avvicinandosi ulteriormente all'antenna si ottiene invece un andamento oscillante che è tipico della zona di Fresnel. Nel caso particolare di apertura quadrata di dimensione a risulta $a_1=-a_2=b_1=-b_2=a$. Di conseguenza $u_1=u_2=v_1=v_2=w$ e la relazione precedente diventa:

$$[B.4.10] \quad P_n = 4P_i [C^2(w) + S^2(w)]^2 \quad \text{con} \quad w = \sqrt{\frac{2}{\lambda r}} \frac{a}{2}$$

Considerando il segmento con una estremità nell'origine e l'altra corrente, al diminuire della distanza r , la variabile w cresce, la seconda estremità si allontana dall'origine e la lunghezza del segmento incrementa. Per la densità di potenza P_n si ottiene l'andamento mostrato in figura B.4.3 in cui, al diminuire della distanza r , la

crescita di P_n in zona di Fraunhofer è limitata fino ad un valore di w che corrisponde alla massima elongazione di tale segmento (che si ha quando $w=1.2$).

Questo valore di w corrisponde al limite tra zona di Fraunhofer e zona di Fresnel e determina un massimo assoluto di P_n detto **pseudo-fuoco**. Il valore della densità di potenza P_n nello pseudo fuoco è circa 4.5 dB sopra la potenza che transita nell'apertura. Infatti, usando la [B.4.10], per $w=1.2$ risulta $r=0.34a^2/\lambda$, per cui $P_n/P_t=4(0.92)^2=2.85\approx 4.5$ dB. Quando r supera tale limite, detta distanza di pseudo-fuoco r_{pf} , sulla spirale di Cornu il secondo estremo si riavvicina all'origine e pertanto la densità di potenza P_n diminuisce. Al diminuire di r , si ottiene un andamento oscillante di P_n funzione del secondo estremo che percorre la spirale, in modo tale che si determinano distanze in cui la densità di potenza P_n ha minimi e massimi relativi, fino a quando non si raggiunge l'apertura quadrata per $r=0$.

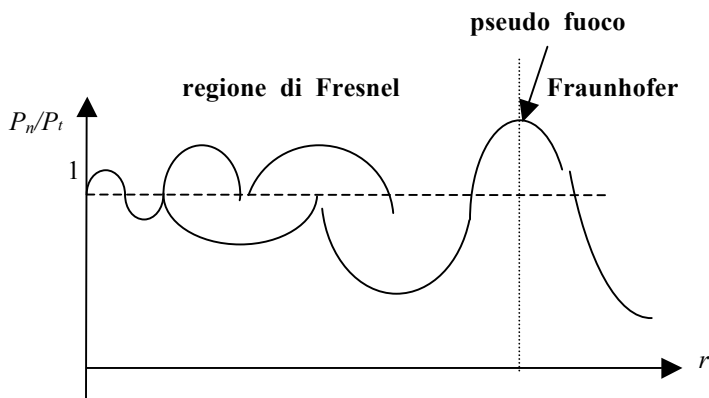


FIGURA B.4.3. Andamento della densità di potenza sull'asse di un'apertura quadrata al variare di r .

B.4.1.4 Diffrazione da semipiano

La trattazione dell'apertura in zona di Fresnel è anche adeguata ad analizzare problemi di propagazione elettromagnetica riconducibili a diffrazione da apertura. È il caso della diffrazione da un semipiano, che può descrivere ad esempio la propagazione in presenza di rilievi che determinano un ostacolo per l'onda elettromagnetica.

La geometria è quella indicata in figura B.4.4, in cui un ostacolo giacente sul piano x - y è riconducibile ad un semipiano metallico che limita la propagazione ad un'apertura di dimensioni limitate inferiormente nella direzione y . La distanza b_1 del limite del semipiano rispetto all'asse z è denominata **franco**. Nella direzione x , o superiormente nella direzione y , l'apertura risulta illimitata, per cui non è ipotizzabile assumere il punto di osservazione a distanza di Fraunhofer.

Con riferimento alla geometria identificata in figura B.4.4, in questo caso risulta $a_1=a_2\rightarrow\infty$ e $b_2\rightarrow\infty$, per cui $u_2\rightarrow\infty$, $u_1\rightarrow-\infty$, $v_2\rightarrow\infty$, mentre si ha per v_1 :

$$v_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} \frac{b_1}{2}$$

Si noti che v_1 risulta negativo o positivo a secondo se il ciglio del semipiano si trovi sotto o sopra l'asse z . Utilizzando l'eq. (B.4.8), si ottiene:

$$P_n = P_t \frac{1}{4} \left\{ (0.5 + 0.5)^2 + (0.5 + 0.5)^2 \right\} \left\{ \left[0.5 - C(v_1) \right]^2 + \left[0.5 - S(v_1) \right]^2 \right\}$$

da cui si ricava la densità di potenza P_n sull'asse z in funzione della distanza r e del franco $b_1/2$:

$$[B.4.11] \quad P_n = P_t \frac{1}{2} \left\{ \left[0.5 - C(v_1) \right]^2 + \left[0.5 - S(v_1) \right]^2 \right\}$$

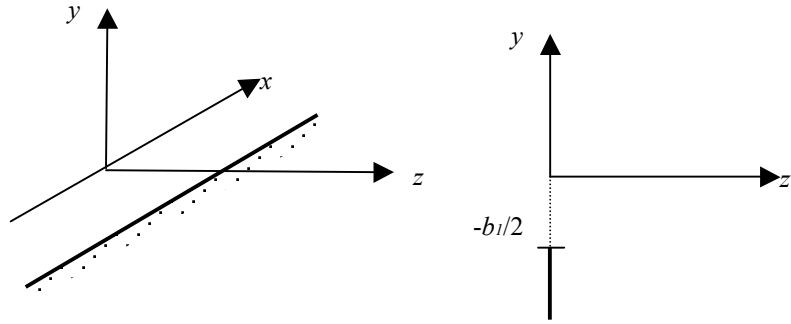


FIGURA B.4.4. Geometria del problema di diffrazione da semipiano.

L'andamento della **densità di potenza normalizzata**, rispetto a quella sull'apertura P_t , in funzione di v_1 è mostrato in figura B.4.5. Si noti che per $v_1 = 0$, ovvero quando r tende all'infinito o quando il franco è nullo, la densità di potenza diventa un quarto di quella che transita nell'apertura, risultando $P_n = P_t/4$ ovvero si ha un'**attenuazione di 6 dB** di P_n rispetto a P_t . Per $b_1 \rightarrow +\infty$, cioè nel caso in cui non ci sia lo schermo, si ottiene una densità di potenza costante pari a P_t ($P_n = P_t$), come quella dell'onda piana imperturbata.

Nelle situazioni intermedie sulla spirale di Cornu si individua un segmento con un estremo nel punto $C(v \rightarrow \infty) = S(v \rightarrow \infty) = 0.5$ e l'altro corrente sulla mappa. Questo segmento, nella sua lunghezza, definisce il valore del vettore di Poynting per via grafica. Quando il semipiano si avvicina alla linea dell'asse z , ovvero diminuisce b_1 , l'estremo del segmento parte dal punto $C(v \rightarrow -\infty) = S(v \rightarrow -\infty) = -0.5$ e la densità di potenza sull'asse z ha un andamento oscillante fino a raggiungere il punto di massima elongazione in corrispondenza del quale si ha il massimo del rapporto P_n/P_t che vale 1.44 per $v_1 = -1.2$ (fenomeno dello **pseudo fuoco**).

Quando si arriva al punto in cui $v_1 = 0$, procedendo ancora verso valori crescenti di v_1 e quindi negativi di b_1 , l'apertura tende a ridursi sempre di più e così anche la

densità di potenza P_n che oltrepassa il semipiano, la quale tende pertanto a zero. Per $b_l \rightarrow -\infty$, lo schermo chiude completamente l'apertura, il segmento si riduce ad un punto e la densità di potenza P_n va a zero.

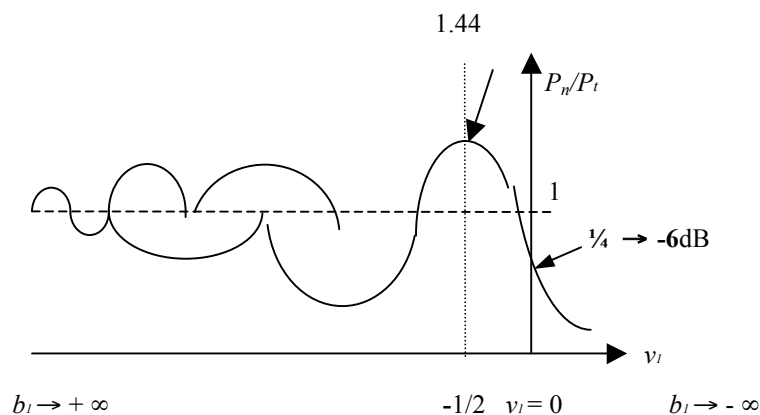


FIGURA B.4.5. Densità di potenza normalizzata in funzione di v_l .

La diffrazione da un semipiano può descrivere in forma schematica la presenza di un'ostacolo, come per esempio una collina, che oscura l'onda e.m. diretta da un trasmettitore T ad un ricevitore R (si veda figura B.4.6). In generale, una volta nota l'orografia del terreno, è possibile ricavare delle mappe di copertura relative ad ogni trasmettitore considerando, tra l'altro, che in prossimità degli pseudo-fuochi si hanno degli aumenti di segnale trasmesso. Da quanto sopra, in un collegamento con franco nullo sull'ostacolo, è possibile stimare una riduzione di potenza pari circa a 6 dB.

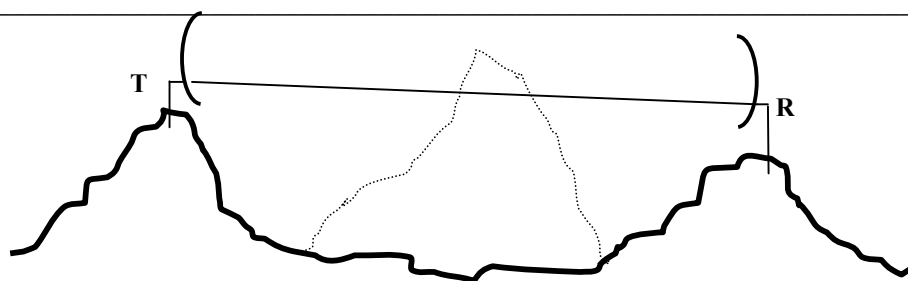


FIGURA B.4.6. Ostacolo frapposto in un radio collegamento tra T e R.

B.4.1.5 Zone di Fresnel per antenne ad apertura

L'approssimazione di **Fraunhofer**, come noto dal Cap. 2, assume che il punto di osservazione P sia molto lontano dalle sorgenti sull'apertura, per cui le congiungenti con i punti di sorgente possono considerarsi tutte parallele. Lo stesso se pensiamo all'antenna in ricezione che riceve radiazione da un punto molto lontano. Per

illuminazione con fase costante i contributi dei diversi punti di sorgente lungo congiungenti ortogonali al piano di bocca arrivano con la stessa fase nel punto di osservazione e il diagramma di radiazione in tale direzione pertanto è massimo.

Per punti di osservazione fuori dalla direzione di puntamento gli sfasamenti dovuti ai diversi percorsi dalla sorgente all'osservatore, rappresentati in figura B.4.7, determina una diminuzione del campo a causa di interferenze distruttive. Al limite, si hanno dei nulli del campo irradiato quando lo sfasamento tra punti di sorgente alle estremità opposte dell'antenna di dimensione $2a$ raggiunge il valore 2π e per ogni punto di sorgente ne esiste uno che determina un contributo sfasato di π (in opposizione di fase). Questo accade quando $ka\sin\theta_l=2\pi$ e, per θ piccoli per cui il seno si confonde con l'angolo, quando $\theta_l=2\pi/ka=\lambda/a$. Questo risultato era stato già ricavato, trattando dell'apertura illuminata uniformemente nel Cap. 4. Una opportuna variazione di fase lineare sull'apertura può compensare tale sfasamento e determinare un massimo in una direzione diversa dall'asse dell'antenna, come già discusso nel Cap. 4.

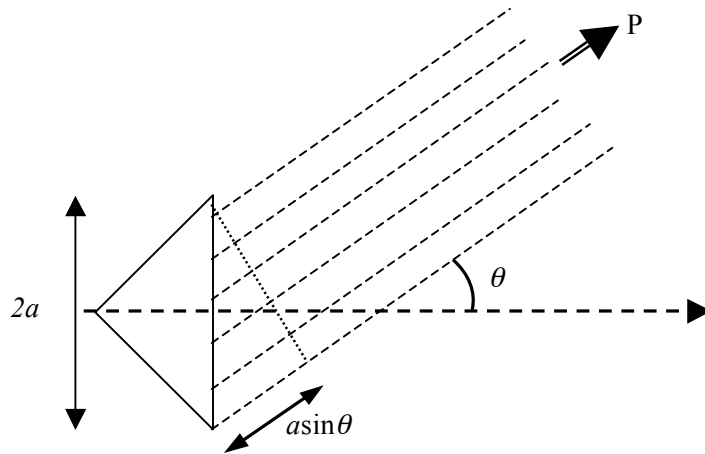


FIGURA B.4.7. Raggi congiungenti i punti di sorgente sull'apertura al punto di osservazione P a grande distanza posto lungo una direzione qualsiasi rispetto all'asse dell'apertura.

Se il punto P si avvicina al piano dell'apertura, a distanza r inferiore al limite della regione di Fraunhofer (ovvero, si entra nella cosiddetta **zona di Fresnel**), diversi punti di sorgenti producono contributi nel punto di osservazione che differiscono in fase, come si vede in figura B.4.8. Se d è il percorso da un punto dell'apertura al punto di osservazione P, la massima differenza di fase $\Delta\Psi_M$, rispetto al centro dell'apertura, si ha nei punti estremi che distano a dal centro ed è pari a:

$$[B.4.12] \quad \Delta\Psi_M = \frac{2\pi}{\lambda}(d-r) = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\sqrt{r^2 + a^2} - r\right)$$

I punti di sorgente che danno contributi con uguale fase ad un punto di osservazione sull'asse giacciono su delle circonferenze di raggio ρ , centrate nell'origine dell'apertura.

Se assumiamo un'apertura piccola rispetto alla distanza r (ovvero $a/r \ll 1$), la distanza da P di un punto, distante ρ dal centro dell'apertura, vale:

$$[B.4.13] \quad d = \sqrt{r^2 + \rho^2} = r \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{r^2}} \cong r + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{r}$$

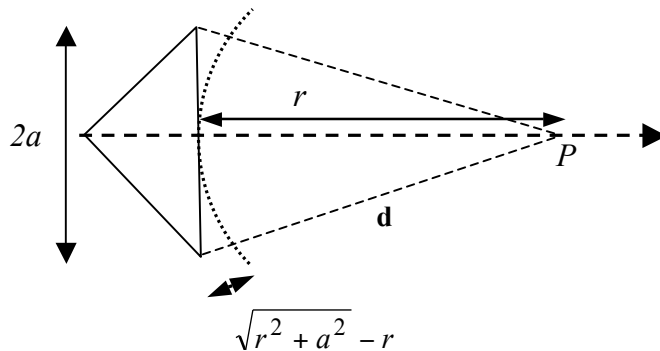


FIGURA B.4.8. Raggi congiungenti i punti di sorgente sull'apertura al punto di osservazione posto sull'asse dell'apertura a distanza ravvicinata.

Pertanto, la differenza di fase rispetto al punto centrale vale:

$$[B.4.14] \quad \Delta\Psi = \frac{2\pi}{\lambda} (d - r) \cong \frac{2\pi}{\lambda} \left(r + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{r} - r \right) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{r} = \frac{\pi}{\lambda r} \rho^2$$

Si definiscono come *zone di Fresnel* quelle porzioni dell'apertura che forniscono contributi in fase concordi al campo osservato. Per quanto detto esse sono corone circolari concentriche delimitate da circonferenze che danno contributi con fase multipli dispari di $\pi/2$.

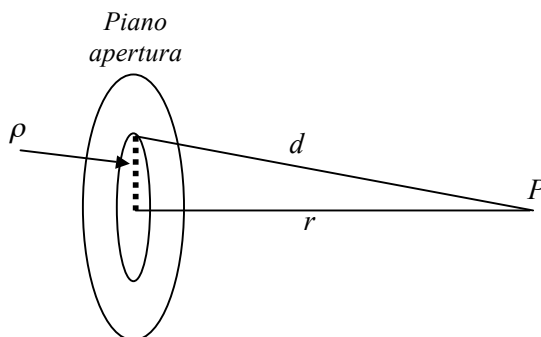


FIGURA B.4.9. Luogo dei punti con uguale distanza e sfasamento rispetto al punto di osservazione sull'asse dell'apertura.

Nello specifico, si avrà che la **prima zona di Fresnel** per una prefissata distanza r del punto di osservazione è rappresentata da un cerchio il cui raggio ρ_I si ottiene ponendo $\Delta\Psi=\pi/2$, ovvero $\rho_I^2=\lambda r/2$. Viceversa, la distanza r_I a cui bisogna porsi dall'antenna affinché un prefissato cerchio di raggio ρ delimiti la prima zona di Fresnel vale pertanto $r_I=2\rho^2/\lambda$. Se ρ è uguale al raggio a dell'antenna, r_I è la distanza per cui tutta l'apertura coincide con la prima zona di Fresnel, e si ritrova la nota formula che delimita la regione di Fraunhofer:

$$[B.4.15] \quad r_I \equiv r_F = \frac{2a^2}{\lambda}$$

Se invece si impone $\Delta\Psi=3\pi/2$, si trova il raggio massimo ρ_{II} della **seconda zona di Fresnel** (che vale $\rho_{II}^2=3\lambda r/2$) oppure la distanza r_{II} a cui ci si deve porre affinché un cerchio di raggio ρ si trovi al limite della seconda zona di Fresnel (che vale $r_{II}=2\rho^2/3\lambda$). Evidentemente il raggio minimo della corona circolare, corrispondente alla seconda zona di Fresnel, coincide con ρ_I .

Proseguendo nel ragionamento, al diminuire di r si “scoprono” sull'apertura un maggior numero di zone di Fresnel. Viceversa, all'aumentare di r diminuiscono le zone scoperte e in regione di Fraunhofer è scoperta in tutto o in parte solo la prima zona di Fresnel che fornisce contributi tutti in fase al campo sull'asse. Al crescere del loro ordine, le zone sono corone circolari sempre più sottili.

Come sappiamo, in zona di Fraunhofer la densità di potenza irradiata decresce come $1/r^2$. Avvicinandosi all'apertura, a causa dei contributi in fase o controfase dei punti di sorgente, essa presenta un andamento oscillante a seconda di quali zone di Fresnel sono state scoperte. Se normalizziamo la densità di potenza $P_n(r)$ nel punto di osservazione al valore che ha sull'apertura P_t (ovvero quella del campo di illuminazione sull'apertura), si ottiene una curva come in figura B.4.10.

Avvicinandosi all'apertura, oltre il limite della distanza di Fraunhofer $r_F=2a^2/\lambda$, la densità di potenza $P_n(r)$ diminuisce la sua crescita a causa della scopertura della seconda zona di Fresnel, fino a una distanza r_p , corrispondente al cosiddetto **pseudo-fuoco**, dove $P_n(r)$ presenta un massimo e dopo il quale inizia a diminuire. In zona di Fresnel, pertanto, la densità di potenza non è più proporzionale a $1/r^2$ e l'intensità di radiazione non è più indipendente dalla distanza. Di conseguenza anche la direttività dell'antenna non sarebbe più univocamente determinata, venendo a dipendere dalla distanza.

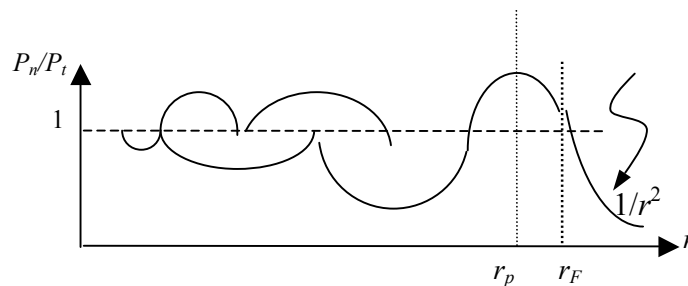


FIGURA B.4.10. Andamento qualitativo della densità di potenza al variare della distanza del punto di osservazione posto sull'asse dell'antenna.

Infine, si tenga conto che anche queste considerazioni sono valide a distanza dall'antenna comunque sufficientemente grande da far prevalere il campo radiativo. In zona di campo reattivo, come è noto, il vettore di Poynting non è più reale, anche se il mezzo è privo di perdite. Per questo motivo l'andamento in figura B.4.10 non è stato tracciato per valori di r piccoli.

B.4.2 Illuminatori ad alta efficienza

Le applicazioni spaziali e radar richiedono **antenne con alte prestazioni** (efficienza di lobo principale e di polarizzazione). Ad esempio, le antenne su satellite devono garantire isolamento tra diverse celle sulla superficie terrestre e purezza di polarizzazione per le applicazioni a diversità di polarizzazione.

Gli **illuminatori di antenne a riflettore** sono in genere antenne a tromba che devono garantire per quanto detto bassi lobi laterali e alta efficienza di polarizzazione. A tal scopo, si esporranno nel seguito alcuni principi di progetto di illuminatori ad alta efficienza.

B.4.2.1 Efficienza di polarizzazione di illuminatori

Elevata efficienza di polarizzazione richiede che il campo e.m. sia irradiato nella polarizzazione del ricevitore (*co-polarizzazione*), mentre il campo e.m. nella polarizzazione ortogonale (*cross-polarizzazione*) sia al di sotto di un prefissato valore. Questo deve essere garantito entro diversi angoli di osservazione, tipicamente entro il lobo principale.

Assumiamo il massimo della direttività sia lungo l'asse z e la polarizzazione voluta sia lineare e lungo l'asse y . A scopo esemplificativo immaginiamo l'antenna ricevente sia un dipolo allineato lungo l'asse y (si veda figura B.4.11). Spostiamo il punto di osservazione fuori l'asse z (che rappresenta la direzione di massima direttività) per angoli piccoli entro il lobo principale e ruotiamo intorno z (supponendo $0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

Condizione sufficiente affinché sia verificata è che le componenti del campo elettrico soddisfino la seguente relazione:

$$[B.4.16] \quad \begin{cases} E_\theta(r, \theta, \varphi) = e(\theta) \sin \varphi \\ E_\varphi(r, \theta, \varphi) = e(\theta) \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = e(\theta) \end{cases}$$

dove $e(\theta)$ è una generica funzione del solo angolo zenitale θ .

Dimostrazione: efficienza di polarizzazione.

In riferimento alla figura B.4.11, le componenti cartesiane del campo elettrico lungo x e y per θ piccoli valgono rispetto a quelle in coordinate sferiche:

$$[B.4.17] \quad \begin{cases} E_x \approx E_\theta(r, \theta, \varphi) \cos \varphi - E_\varphi(r, \theta, \varphi) \sin \varphi \\ E_y \approx E_\theta(r, \theta, \varphi) \sin \varphi + E_\varphi(r, \theta, \varphi) \cos \varphi \end{cases}$$

Affinché il campo sia sempre polarizzato lungo y , deve risultare:

$$[B.4.18] \quad E_x = 0 \Rightarrow E_\theta(r, \theta, \varphi) \cos \varphi = E_\varphi(r, \theta, \varphi) \sin \varphi$$

Nella condizione sopra imposta [B.4.16], l'ampiezza del vettore di Poynting irradiato in campo lontano, dato da:

$$[B.4.19] \quad P_\infty(r, \theta, \varphi) = \frac{|E_{\infty\theta}(r, \theta, \varphi)|^2}{2\eta} + \frac{|E_{\infty\varphi}(r, \theta, \varphi)|^2}{2\eta} = \frac{e^2(\theta)}{2\eta}$$

dipende solo da θ e, quindi, il diagramma di radiazione dell'antenna risulta simmetrico intorno all'asse z ed uguale nei due piani principali di E e di H, come volevasi dimostrare.

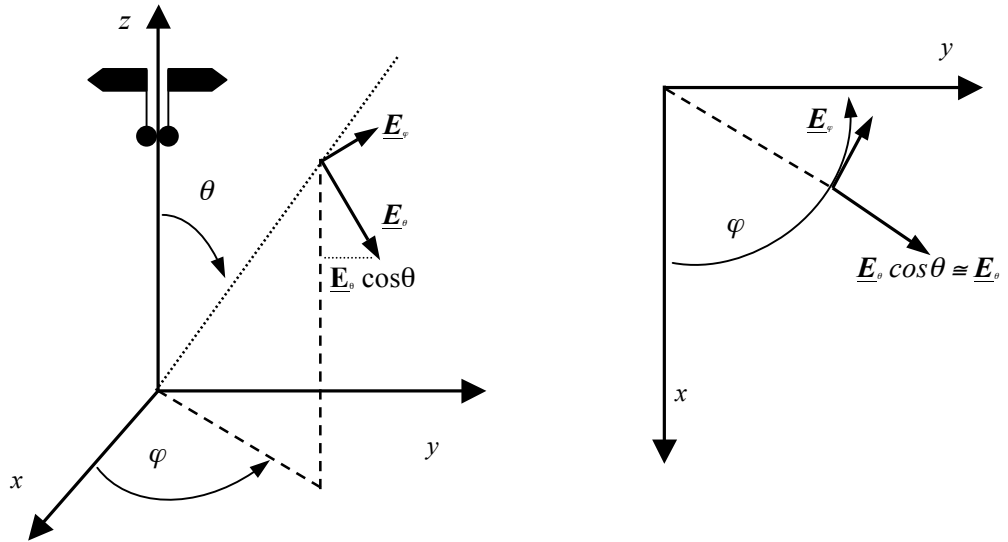


FIGURA B.4.11. Geometria per l'analisi dell'efficienza di polarizzazione.

□

B.4.2.2 Superfici metalliche corrugate

Nel paragrafo relativo alle antenne a tromba nel Cap. 4, abbiamo visto come la funzione di illuminazione è legata alla distribuzione trasversale del modo fondamentale in guida. Tale distribuzione è tipicamente asimmetrica rispetto ai 2 assi e molto rastremata per il campo elettrico in quanto, per guide metalliche, la sua componente tangenziale tende ad annullarsi al bordo. Sappiamo, d'altronde, che **funzioni di illuminazione rastremate** tendono a produrre guadagni poco direttivi e ciò, nel caso di illuminatori di antenne a riflettore, tende a produrre un'elevata dispersione di radiazione e.m. (fenomeno di dispersione o *spillover*: si veda Cap. 5). Una tecnica per ridurre tali effetti negli illuminatori a tromba è quella di ricorrere a **superfici corrugate**, i cui principi realizzativi verranno illustrati brevemente in questo paragrafo.

Per descrivere le proprietà di superfici corrugate, consideriamo un'onda e.m. che incide su una superficie di discontinuità. Detti $\underline{\mathbf{E}}$ e $\underline{\mathbf{H}}$ i campi sulla superficie, ricordiamo che si definisce l'impedenza superficiale Z_s come rapporto di moduli del campo elettrico tangenziale $\underline{\mathbf{E}}_t$ e del campo magnetico tangenziale $\underline{\mathbf{H}}_t$ sulla superficie:

$$[\text{B.4.20}] \quad \underline{\mathbf{n}}_0 \times \underline{\mathbf{E}} = Z_s(x, y) \underline{\mathbf{H}}_t$$

dove $\underline{\mathbf{n}}_0$ è diretto lungo \hat{z} , secondo la figura B.4.12. Consideriamo una **superficie metallica corrugata** di tipo **conduttrice elettrica perfetta (CEP)**, come in figura. Le parti cave (tra i “denti” della superficie corrugata) formano una guida metallica, non semplicemente connessa e cortocircuitata all'estremità a distanza d , costituita da due piani paralleli illimitati distanti w . La struttura supporta un modo TEM che si propaga lungo \hat{z} e, se $w \ll \lambda$, gli altri modi sono sotto la frequenza di soglia (in inglese, *cut-off frequency*) e, quindi, non eccitati. L'impedenza superficiale $Z_s(x, y)$ della struttura ha un comportamento anisotropo rispetto a x - y . Sviluppando l'eq. [B.4.20], si ha:

$$\underline{\mathbf{z}}_0 \times \underline{\mathbf{E}} = E_x \underline{\mathbf{y}}_0 - E_y \underline{\mathbf{x}}_0 = Z_s (H_x \underline{\mathbf{x}}_0 + H_y \underline{\mathbf{y}}_0) \Rightarrow \begin{cases} E_y / H_x = -Z_s(x, y) \\ E_x / H_y = Z_s(x, y) \end{cases}$$

In queste condizioni, un campo elettrico E_x (parallelo alle scanalature) non eccita nessun modo nella guida cosicché permane una condizione al contorno di tipo CEP ($E_x=0$). Un campo elettrico E_y , ortogonale alle scanalature, nelle parti cave (di larghezza w) eccita un'onda TEM, mentre nelle parti sporgenti (di larghezza t) è riflesso dal CEP. Per w piccola rispetto a d e λ , ma grande rispetto a t , la corrugazione complessivamente determina una **impedenza superficiale** $Z_s(x, y)$, dovuta in una certa porzione t alle zone sporgenti (pari a un cortocircuito, per cui $Z_s(t)=0$) e per una diversa porzione w alle parti cave (pari all'impedenza di una linea di trasmissione con impedenza caratteristica $Z_0=\eta=377 \Omega$, lunga d e in cortocircuito all'estremità, per cui $Z_s(w)=j\eta \tan(kd)$). Approssimativamente, effettuando una media pesata dei due valori di impedenza, si ottiene l'espressione:

$$[\text{B.4.21}] \quad -\frac{E_y}{H_x} \cong \frac{t}{w+t} Z_s(t) + \frac{w}{w+t} Z_s(w) = \frac{w}{w+t} [j\eta \tan(kd)]$$

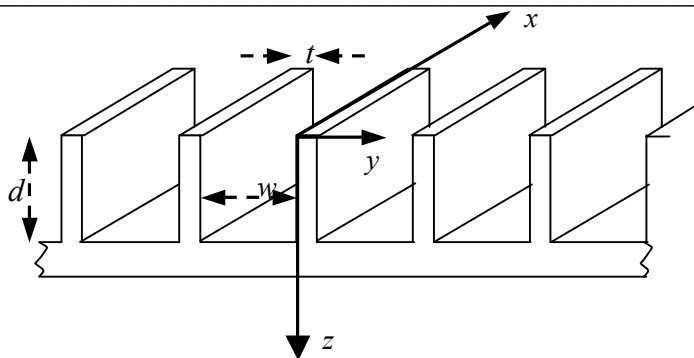


FIGURA B.4.12. Geometria per l'analisi di superfici corrugate.

Per forzare a zero il campo magnetico tangenziale H_x sulla superficie corrugata, si deve porre $d=\lambda/4$ per avere una condizione di circuito aperto (tale che Z_s tenda all'infinito), ovvero di tipo **conduttrice magnetica perfetta** (CMP). Si noti, infine, che il campo elettrico normale E_z si annulla sulla superficie di tipo CMP (vedi condizioni al contorno nel Cap. 2).

B.4.2.3 Trombe piramidali e coniche corrugate

Le trombe divergenti sui piani di E e di H, le trombe piramidali e, in minor misura, le trombe coniche, presentano scarsa **simmetria del diagramma di radiazione** rispetto a φ (funzioni di illuminazione nei piani principali diverse sia in modulo che in fase; si veda il Cap. 4). Le trombe corrugate sono trombe le cui pareti interne sono lavorate meccanicamente, come una superficie corrugata descritta precedentemente. Si ottiene una **parete d'impedenza di tipo magnetico** (CMP) dalle caratteristiche opportune, legate alla profondità dei denti, che annulla le componenti del campo magnetico e determina una funzione di illuminazione rastremata simile sui due piani principali di E e di H.

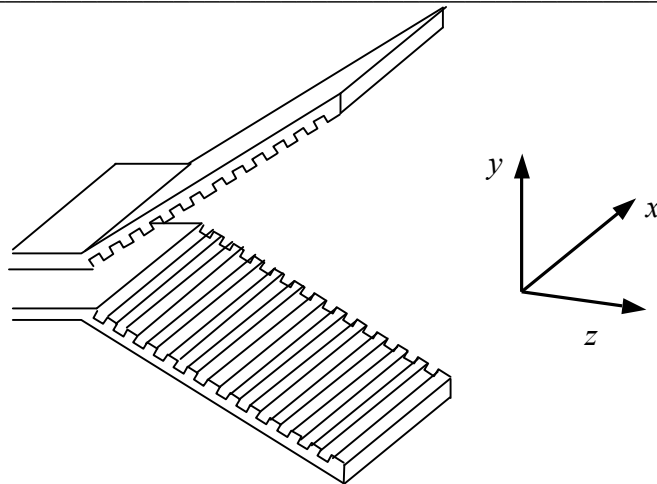


FIGURA B.4.13. Esempio di tromba settoriale sul piano E a facce corrugate.

Con riferimento alla **tromba settoriale sul piano di E** in figura B.4.13 (si noti il sistema di riferimento diverso dalla figura B.4.12 per individuare con z l'asse di puntamento dell'antenna a tromba), le pareti corrugate sono, in genere, quelle delle due facce che divergono sul piano di E (piano y - z) e le scanalature sono parallele alla direzione del campo magnetico trasverso (asse x). La **funzione di illuminazione** $E_y(x,y)=f_y(x,y)$ sulla bocca della tromba è, in generale, approssimata dall'andamento cosinusoidale in ampiezza rispetto a x del modo fondamentale TE_{10} nel piano

orizzontale di H (ovvero \tilde{x} - x) e dalla fase quadratica rispetto a y nel piano verticale di E (ovvero \tilde{y} - y):

$$E_y(x, y) = E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-jk_z y^2 / 2\rho_1} \quad |x| < a/2, \quad |y| \leq b_1/2$$

dove E_0 è l'ampiezza, ρ_1 è l'elongazione della tromba e k_z la costante di fase (si veda Cap. 4).

La presenza della superficie corrugata determina al bordo una **condizione CMP** che annulla il campo magnetico tangenziale (in figura pari a H_x , componente lungo x) e il campo elettrico normale (in figura pari circa a E_y , componente lungo y). Ciò determina sulla bocca della tromba una modifica della **funzione di illuminazione** $f_j(x, y)$ in quanto la stessa risulta rastremata rispetto a y *in ampiezza anche* sul piano verticale di E a causa della superficie corrugata. Inoltre, quest'ultima determina un minore effetto dell'errore di fase nello stesso piano di E in quanto tende a modificare anche la fase di $f_j(x, y)$ rispetto a y .

La lavorazione della superficie corrugata è tipicamente effettuata realizzando una transizione progressiva dalla condizione CEP in guida alla condizione CMP nella tromba, ovvero incrementando gradualmente la profondità delle scanalature. Analoghe considerazioni è possibile effettuarle, con le dovute modifiche, per le **trombe corrugate settoriali sul piano di H** e le **trombe corrugate piramidali**.

Nella **tromba conica** si presenta tipicamente il problema della purezza di polarizzazione, poiché il campo del modo fondamentale in guida d'onda circolare TE_{11} presenta componenti sia lungo x che lungo y . Per ottenere un campo polarizzato solo lungo y , e allo stesso tempo una rastremazione ai bordi che determina un lobo di radiazione e.m. azimutalmente simmetrico, è opportuno far propagare anche il modo TM_{11} . La composizione opportuna dei due modi conduce alla configurazione di campo come in figura B.4.14 (**trombe coniche bimodali**). Sono trombe che, tuttavia, hanno una piccola larghezza di banda in quanto variando la frequenza si determinano diverse configurazioni del campo di illuminazione a causa della diversa velocità di fase dei due modi.



FIGURA B.4.14. Combinazione modo TE_{11} (a sinistra) e TM_{11} (al centro) ed illuminazione risultante (a destra).

Le *trombe coniche* hanno cross-polarizzazione bassa se di piccole dimensioni. Illuminatori più grandi a maggior guadagno si realizzano con trombe con pareti interne corrugate che determinano illuminazioni maggiormente simmetriche, come detto nel caso precedente. Inoltre, si dimostra che esse supportano un modo ibrido HE_{11} con configurazione di campo pari alla composizione del TE_{11} e TM_{11} avente i pregi indicati per le trombe bimodali senza lo svantaggio della limitata banda (è un modo supportato dalla struttura e non la combinazione di due modi con diversa velocità di fase).

B.4.3 Antenne a riflettore sferico

I riflettori a calotta sferica non hanno proprietà di collimazione e focalizzazione come i riflettori parabolici. Tuttavia, presentano la peculiarità di focalizzare i raggi e.m. incidenti non in un punto (fuoco), ma su una curva detta **linea di aberrazione**. Ciò consente, in linea di principio, di posizionare più illuminatori lungo tale curva in modo da realizzare sistemi di ricezione multi-frequenza e multi-polarizzazione, di estrema utilità per applicazioni radioastronomiche e di telerilevamento.

Consideriamo la geometria del *riflettore a calotta sferica*, riportata in figura B.4.15. Analizzando l'antenna in ricezione, per raggi incidenti collimati (paralleli) sulla bocca, questi intercettano l'asse ζ in punti diversi.

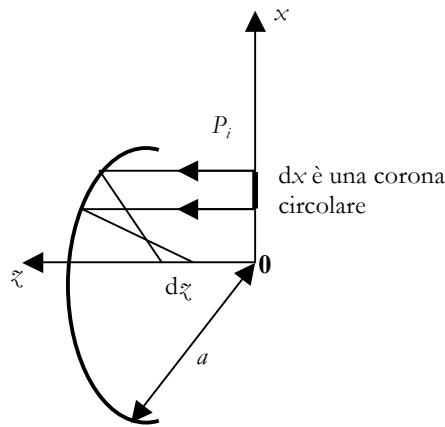


FIGURA B.4.15. Geometria di riflettori a calotta sferica.

Allo scopo di posizionare correttamente l'illuminatore, è importante conoscere come si distribuisce la densità di potenza P_a sull'apertura di bocca lungo l'asse ζ . Sussiste la seguente relazione:

$$[B.4.22] \quad P_a(\zeta) = \frac{P_0}{8} \left(\frac{a}{\zeta} \right)^3 \quad \frac{a}{2} < \zeta < a$$

dove P_0 è una costante proporzionale alla densità di potenza incidente e a il raggio della calotte sferica.

Dimostrazione: potenza di bocca di riflettore sferico

Per calcolare la distribuzione di potenza $P_a(z)$ lungo l'asse z , si applica il metodo del tubo di flusso. Dalla geometria del problema in figura B.4.15 discende:

$$z = \frac{a}{2 \cos \theta} \quad \text{con} \quad \cos \theta = \frac{a}{2z}, \quad x = a \sin \theta = a \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = a \sqrt{1 - \frac{a^2}{4z^2}}$$

da cui la relazione differenziale:

$$\frac{dx}{dz} = a \frac{1}{2 \sqrt{1 - \frac{a^2}{4z^2}}} \left(\frac{2a^2}{4z^3} \right) = a \frac{1}{2 \sin \theta} \left(\frac{2a^2}{4z^3} \right) = \frac{1}{4} \frac{a^4}{z^3}$$

Individuato un tubo di flusso come indicato in figura, la sezione trasversa sul piano di bocca è una corona circolare e pertanto:

$$P_a(z) = k_n P_i \frac{dA}{dz} = k_n P_i \frac{2\pi x dx}{dz} = k_n \frac{\pi}{2} P_i \frac{a^4}{z^3}$$

Ricaviamo il fattore di normalizzazione k_n considerando il caso $\theta=0$. Per ogni raggio diretto secondo $\theta>0$, l'intersezione con l'asse z si ha in un punto di coordinata $z>a/2$. Nel caso limite $\theta=0$, si ha $z=a/2$, pertanto:

$$P_a(z)_{\theta=0} = P_a\left(\frac{a}{2}\right) = P_0 = k_n \frac{\pi}{2} P_i 8 \frac{a^4}{a^3} = 4k_n P_i \pi a \Rightarrow k_n = \frac{P_0}{4\pi a P_i}$$

Sostituendo si trova la densità di potenza sull'asse in funzione della distanza z dal centro della sfera:

$$P_a(z) = \frac{P_0}{8} \left(\frac{a}{z} \right)^3 \quad \frac{a}{2} < z < a$$

Come volevasi dimostrare.

□

B.5 Complementi di Allineamenti di antenne

Gli argomenti trattati nell'Appendice B.5 riguardano:

- analisi del metodo di sintesi di allineamenti rettilinei simmetrici, basati sul metodo di Dolph-Chebyshev;
- cenni sui metodi di sintesi di allineamenti non uniformi basati sulle tecniche di Shelkunoff, Fourier e Woodward-Lawson.

Per “*sintesi*” si intendono quelle metodologie mediante le quali si effettua il progetto di un sistema (nel caso delle antenne, tipicamente la loro geometria e composizione materiale) a partire da specifiche applicative (nel caso di antenne, tipicamente parametri radiativi quali la direttività, livello dei lobi secondari e impedenza di ingresso). Gli allineamenti o cortine di antenne si prestano ad illustrare i metodi di sintesi in quanto offrono un ulteriore grado di libertà rappresentato dalla disposizione relativa nello spazio delle singole antenne e la loro alimentazione.

B.5.1 Sintesi di allineamenti rettilinei simmetrici

In questa sezione descriviamo alcune tecniche di progetto di allineamenti rettilinei, ovvero di scelta della spaziatura tra gli elementi e della loro alimentazione. È l'unica sezione del testo rivolta alla fase di *progettazione* (o di *sintesi*) di una antenna, che ormai si avvale soprattutto di **programmi di calcolo numerico** (in inglese, CAD: *Computer Aided Design*) e di **metodi di ottimizzazione** per minimizzare opportuni funzionali dettati dalle specifiche applicative. Tuttavia, le tecniche qui descritte sono ancora strumenti utili e, soprattutto, esempi validi dal punto di vista didattico.

B.5.1.1 Allineamenti di tipo Dolph-Chebyshev

Nel Cap. 6 è stato mostrato che il fattore di cortina F_c di un allineamento rettilineo simmetrico di N antenne a sfasamento lineare progressivo può essere espresso come combinazioni lineari di **polinomi di Chebyshev** $T_b(x)$, con $x = \cos(u/2)$ e con grado fino a $N-1$. Esso è, pertanto, a sua volta un polinomio di grado uguale a $N-1$ (N è il numero degli elementi).

I polinomi di Chebyshev, come già visto, hanno tutti gli **zeri**, i **minimi** e i **massimi** relativi nel quadrato $-1 \leq x \leq 1$, ove assumono valori in modulo al massimo pari a uno ($-1 \leq T_k(x) \leq 1$). A ciò si aggiunge una ulteriore proprietà che li rende utili nella ottimizzazione di allineamenti simmetrici, descritta graficamente in figura B.5.1. Se consideriamo un generico polinomio $p_k(x)$ di grado k passante per il punto (x_0, R) , fuori del quadrato unitario e rappresentato dalle linee tratteggiate in figura, se $p_k(x)$ ha uno zero (x'_1) maggiore degli zeri ($x_l, l=1, \dots, k$) del polinomio di Chebyshev $T_k(x)$, rappresentato dalla linea in neretto (ovvero $x'_1 > x_l, \forall l$), il suo

modulo $|p_k(x)|$ assume sicuramente valori maggiore di 1 nell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$. D'altra parte, se $|p_k(x)|$ avesse massimi relativi inferiori a 1 in tale intervallo, esso andrebbe sicuramente ad intersecare l'ascissa a sinistra rispetto all'ultimo zero del polinomio di Chebyshev dello stesso grado (ovvero $x'_{n-1} < x_k$).

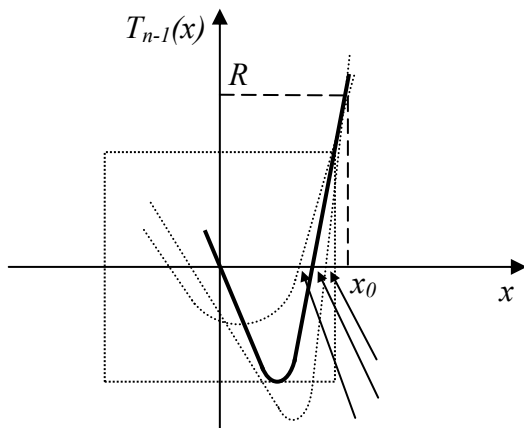


FIGURA B.5.1. Proprietà dei polinomi di Chebyshev e loro proprietà.

Stabilito che il fattore di allineamento F_c è un polinomio di grado $N-1$, queste proprietà rendono i polinomi di Chebyshev una scelta ottimale per assicurare un buon compromesso tra larghezza del lobo principale ed livello dei lobi laterali, grandezze sempre in competizione nel progetto di antenne. Infatti, se facciamo coincidere il massimo del fattore di allineamento (per $u=0$) con il valore R nel punto x_0 , allora la distanza tra l'ascissa x_0 e il nullo x'_{n-1} più a destra del polinomio è legata all'ampiezza nullo-nullo del lobo principale; invece, i lobi laterali vengono a coincidere con i massimi relativi del fattore di allineamento F_c , come risulta anche dalla costruzione grafica riportata in figura B.5.1.

Evidentemente le proprietà prima descritte suggeriscono che un polinomio di Chebyshev (di grado $N-1$) rappresenta il miglior compromesso in quanto qualunque altro polinomio (dello stesso grado) con lobo principale più stretto avrebbe lobi laterali più alti; invece, un qualunque altro polinomio con lobi laterali più bassi passerebbe a sinistra dell'ultimo zero del polinomio di Chebyshev e quindi avrebbe lobo principale più largo. Nel caso del polinomio di Chebyshev, che ha massimi/minimi relativi unitari nell'intervallo $-1 < x < 1$, i lobi laterali hanno tutti ampiezza in modulo uguale a 1 se x non esce da tale intervallo, e il rapporto tra lobo principale e lobi laterali è pari a $R/1=R$.

L'equazione di progetto si ottiene pertanto eguagliando la generica espressione del fattore di allineamento $F_c(x)=F_d[\cos(u/2)]=F_c(u)$ di allineamenti simmetrici, con un polinomio di Chebyshev T_{N-1} di grado $N-1$. Si deve, però, ottenere che nel punto $u=0$ (ovvero $x=\cos(u/2)=1$), corrispondente alla direzione del massimo, $F_c(x)$ assuma il valore R , determinato dal requisito di progetto relativo al rapporto tra lobo principale e lobi laterali. Siccome un polinomio di Chebyshev assume il valore $R>1$ per una ascissa $x_0>1$, occorre effettuare una modifica di scala, cioè considerare

un polinomio di Chebyshev $T_{N-1}(xx_0)$ rispetto ad una nuova variabile $x'=xx_0$, in modo che si abbia il valore $T_{N-1}(x_0)=R$ per $x=\cos(u/2)=1$. Contrariamente, infatti, per $x=\cos(u/2)>1$, si andrebbero a considerare valori di u non reali e, quindi, fuori dal cerchio di visibilità. Se N rappresenta il numero di elementi richiesti, l'equazione di progetto è, pertanto, la seguente (contemplando entrambi i casi di N pari o dispari; si veda Cap. 6 per dettagli):

$$[B.5.1] \quad F_c(x) = F_c \left[\cos\left(\frac{u}{2}\right) \right] = 2 \sum_{b=0,1}^{N-1} |a_b| T_b(x) = T_{N-1}(x_0 x)$$

Usando l'eq. [B.5.1], eguagliando i termini in x di uguale potenza, si possono ricavare i diversi coefficienti $|a_b|$ di alimentazione, e quindi sintetizzare l'allineamento. Il valore di x_0 è determinato dalla condizione $T_{N-1}(x_0)=R$, ovvero dal requisito dell'antenna in termini di ampiezza dei lobi laterali sotto quello principale. Per le proprietà dei polinomi di Chebyshev con argomento maggiore di 1, x_0 è fornito dalla seguente equazione, la cui soluzione in genere si basa su espressioni approssimate:

$$[B.5.2] \quad R = T_k(x_0) = \cosh(k \cosh^{-1} x_0) \Rightarrow x_0 = \cosh \left[\frac{1}{k} \cosh^{-1}(R) \right]$$

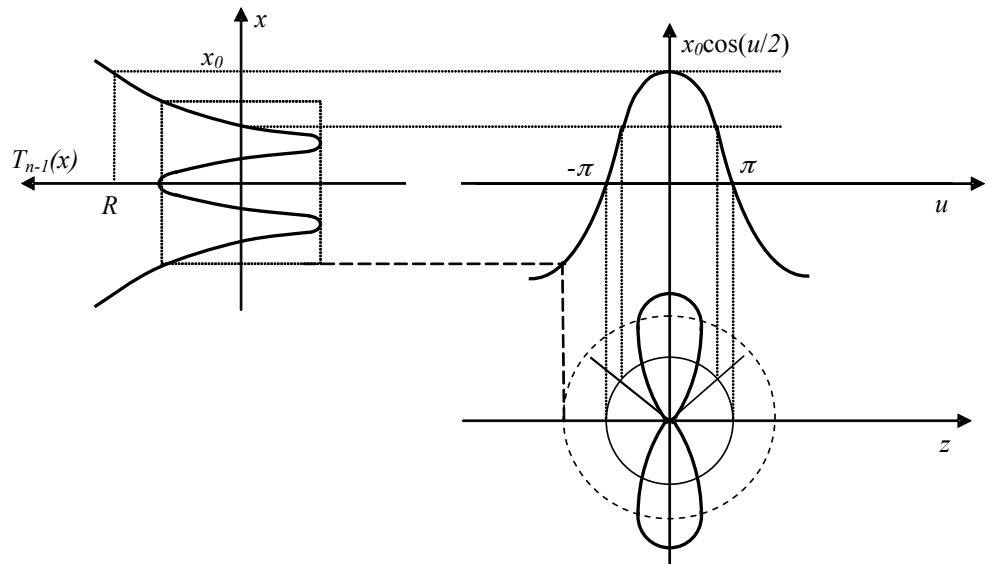


FIGURA B.5.2. Costruzione grafica del diagramma di radiazione per allineamenti simmetrici Dolph- Chebyshev.

In figura B.5.2 è mostrata la costruzione geometrica del diagramma polare del fattore di allineamento che fa uso del **cerchio di visibilità**. Si noti che, in questo caso, il passaggio dalla direzione di osservazione all'argomento del fattore di allineamento ($\theta \rightarrow u \rightarrow x$) avviene in due passi, che richiedono altrettanti grafici per rappresentare le rispettive trasformazioni tra le grandezze. Per quanto riguarda la scelta della distanza d tra gli elementi, ovvero il raggio del cerchio di visibilità, si

deve considerare il fatto che le proprietà dei polinomi di Chebyshev valgono nell'intervallo $-1 \leq x \leq +1$. Si deve, pertanto, garantire che il cerchio non investa valori di $F_c(u)$ fuori da tale intervallo ed in particolare a sinistra di $x=-1$. Una scelta conservativa consiste nel limitare la $F_c(u)$ all'intervallo $0 < x < x_0$ scegliendo il raggio del cerchio di visibilità pari a $2\pi d/\lambda = \pi$, come fatto in figura B.5.2; possiamo, però, anche scegliere un cerchio di visibilità più grande, al massimo come quello tratteggiato nella stessa figura B.5.2.

Lo svantaggio principale dell'allineamento di Dolph-Chebyshev sta nel fatto che i lobi secondari hanno tutti la stessa ampiezza (pari a 1) e non si possono modificare in funzione delle possibili direzioni di arrivo di disturbi dall'ambiente esterno. Questo comporta in genere un elevato livello di rumore raccolto dall'antenna. Per ridurre tale svantaggio, è stata introdotta da Taylor nel 1955 una variazione dell'equazione di progetto, nota come **correzione di Taylor** (o *errore di Chebyshev*), che approssima il fattore di cortina $F_c(x)$, data dalla eq. [B.5.1], attraverso il prodotto tra una funzione *sinc*(u) e la produttoria di fattori, le cui radici sono pari agli zeri del fattore di cortina desiderato e sono spaziate in modo non uniforme rispetto a u secondo un opportuno fattore di scala (si consultino testi di progettazione di antenne, citati in **Bibliografia**).

B.5.1.2 Esempio di sintesi Dolph-Chebyshev

Consideriamo un allineamento simmetrico con $N=4$ elementi (pari) in cui richiediamo un valore del rapporto tra lobo principale e lobi laterali pari a $R=100$. Il progetto dell'allineamento Dolph-Chebyshev consiste nell'imporre la seguente condizione di progetto secondo l'eq. [B.5.1]:

$$[B.5.3] \quad F_c(x) = F_c \left[\cos \left(\frac{u}{2} \right) \right] = 2 \sum_{b=1,3}^{4-1} a_b T_b(x) = 2a_1 T_1(x) + 2a_3 T_3(x) = T_3(x_0 x)$$

dove $a_b = |a_b|$ per semplicità di notazione. Essendo $T_1(x) = x$ e $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, si ottiene:

$$F_c(x) = 2a_1 x + 2a_3 (4x^3 - 3x) = T_3(x_0 x) = 4x_0^3 x^3 - 3x_0 x$$

da cui, sviluppando i calcoli:

$$\begin{aligned} F_c(x) &= 2a_1 x + 8a_3 x^3 - 6a_3 x = 4x_0^3 x^3 - 3x_0 x \\ \Rightarrow x^3 (4x_0^3 - 8a_3) - x(2a_1 + 3x_0 - 6a_3) &= 0 \end{aligned}$$

Eguagliando a zero i termini con uguali potenze di x :

$$\begin{cases} 4x_0^3 - 8a_3 = 0 \\ 2a_1 + 3x_0 - 6a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = x_0^3 / 2 \\ 2a_1 = 6a_3 - 3x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = x_0^3 / 2 \\ 2a_1 = 3x_0^3 - 3x_0 \end{cases}$$

da cui i valori cercati per i 2 moduli delle alimentazioni incognite:

$$[B.5.4] \quad \begin{cases} a_3 = x_0^3 / 2 \\ a_1 = 3x_0 (x_0^2 - 1) / 2 \end{cases}$$

Il valore di x_0 discende dal requisito su R. Avendo imposto $R=100$, deve essere $T_3(x_0)=4x_0^3-3x_0=100$, da cui si considera la soluzione non banale per cui $4x_0^2-3=100$ e pertanto $x_0^2=\sqrt{103}/4$, avendo senso solo la determinazione positiva. In questo modo, si calcolano i valori di a_1 e a_3 .

In figura B.5.2 è stato considerato un caso di allineamento di tipo *broadside* con $\delta=0$ ed il cerchio di visibilità centrato in $u=0$. La funzione $\cos(u/2)$ si annulla in $u=\pi$ e scegliendo $d=\lambda/2$ il cerchio di visibilità ha raggio proprio uguale a π . Per allineamenti di tipo *end-fire*, il discorso è analogo con l'unica differenza di scegliere $d=\lambda/4$. Se scegliessimo $d<\lambda/2$ non è garantita l'ottimizzazione, essendo le proprietà dei polinomi di Chebyshev valide nell'intervallo $-1<x<+1$. Invece, se il cerchio andasse ad intercettare valori $x < -x_0$, ovvero si uscisse dal quadrato $-1,+1$, verrebbe introdotto un altro lobo principale.

B.5.2 Sintesi di allineamenti rettilinei non uniformi

Nel seguito verranno dati dei cenni sui metodi di sintesi di allineamenti non uniformi, basati sulle tecniche di Shelkunoff, di Fourier e di Woodward-Lawson.

B.5.2.1 Metodo di sintesi di Schelkunoff

Questo metodo di sintesi richiede l'imposizione dei nulli del diagramma di radiazioni e fu proposto da *Schelkunoff* nel 1943. Si basa sul fatto che il fattore di cortina F_c per un allineamento rettilineo equidistante costituito da N elementi alimentati con ampiezza $|a_b|$ e sfasamento δ , avendo introdotto la variabile di radiazione $u=\delta+kdcos\theta$, si scrive come noto (si veda Cap. 6):

$$[B.5.5] \quad F_c(u) = \sum_{b=0}^{N-1} |a_b| e^{jb u}$$

Introducendo una nuova variabile di radiazione $\xi=e^{ju}$, genericamente complessa, è possibile porre il fattore di allineamento nella forma di un polinomio di grado $N-1$:

$$[B.5.6] \quad F_c(u) = F_c(\xi) = \sum_{b=0}^{N-1} a_b \xi^b = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots + a_{N-1} \xi^{N-1}$$

Questa forma polinomiale permette di interpretare il fattore di allineamento in maniera utile alla sintesi dell'antenna, ovvero utile a determinare le alimentazioni $|a_b|$ e lo sfasamento δ . In particolare, un polinomio di grado $N-1$ nella variabile ξ avrà $N-1$ zeri $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots \xi_{N-1}$ e si potrà scrivere nella forma seguente:

$$[B.5.7] \quad F_c(\xi) = |a_{N-1}| \prod_{b=1}^{N-1} (\xi - \xi_b) = |a_{N-1}| (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3) \dots (\xi - \xi_{N-1})$$

Un doppietto avrà la forma $a_1(\xi+a_0/a_1)=a_1(\xi-\xi_1)$, e pertanto il fattore di allineamento è il prodotto dei fattori di allineamento di $N-1$ doppietti, i cui zeri

costituiscono anche gli zeri dell'allineamento a N elementi. Un qualunque polinomio di grado $N-1$ può essere, quindi, interpretato come fattore di cortina di un allineamento a N elementi.

Ricordiamo che nel cerchio di visibilità l'angolo θ di osservazione, e quindi la variabile u , sono reali. Poiché, per valori reali di u , $\xi = e^{ju}$ è un numero complesso con modulo unitario, la variabile ξ sul piano complesso si trova su una circonferenza di raggio unitario, centrata nell'origine. La regione di "visibilità" corrisponde solo ad una porzione di tale circonferenza (ovvero un *arco di visibilità*) in cui u è compresa tra $-kd + \delta$ e $kd + \delta$, come illustrato in figura B.5.3.

La lunghezza di questo arco dipende dalla distanza d tra gli elementi. In figura B.5.3 è riportato un caso con d piccolo rispetto a λ . Con d uguale a $\lambda/2$, tutta la circonferenza diventa visibile (in quanto abbiamo un arco di π sia a destra che a sinistra di δ e, quindi, complessivamente di 2π). Con d ancora maggiore, parti di circonferenza sono percorse più volte nell'arco di visibilità. Gli zeri che cadono sulla circonferenza unitaria nella regione di visibilità sono, pertanto, effettivamente zeri del diagramma di radiazione del fattore di cortina $F_c(\theta)$. Gli altri zeri sul piano complesso, interni o esterni alla circonferenza unitaria, non sono, invece, "visibili", ovvero non corrispondono a zeri del diagramma di radiazione, ma influenzano la forma del diagramma stesso.

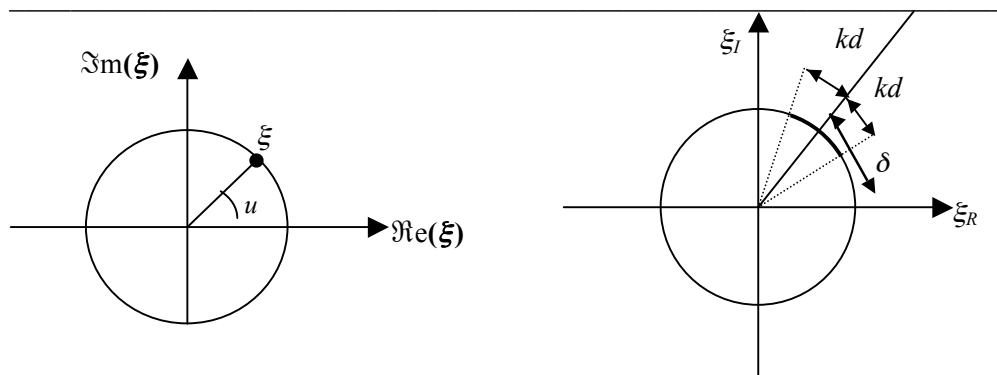


FIGURA B.5.3. Luogo della variabile x sul piano complesso (a sinistra) e dell'arco di visibilità (a destra).

Il **progetto** secondo Shelkunoff si basa sulla scelta della posizione degli zeri del polinomio dell'eq. [B.5.7] in base ai requisiti dell'antenna, ed in particolare i nulli del diagramma di radiazione di $F_c(\theta)$ ed il livello dei suoi lobi laterali. La posizione degli zeri può essere scelta opportunamente pensando che la funzione di allineamento in modulo, scorrendo la variabile $\xi = \exp(j\delta + jkd\cos\theta)$ lungo l'arco di visibilità, viene ad essere il prodotto delle **distanze euclidee** $|\xi - \xi_b|$ tra il punto corrente e gli zeri del polinomio. Quando lo zero si trova sull'arco di visibilità, esso corrisponde, come si è detto, ad un effettivo zero del diagramma di radiazione e, pertanto, abbassa il livello dei lobi laterali anche nell'intorno di quella direzione. Mettendo più zeri vicini, si otterrà un controllo ancora più rilevante dei lobi laterali. Se si considera uno zero doppio, oltre alla funzione di radiazione, si annulla anche la sua derivata e,

pertanto, ciò mantiene ancora più bassi i lobi laterali circostanti. Nei punti dell'arco di visibilità dove gli zeri sono lontani, il fattore di allineamento è in modulo maggiore. Questa situazione possiamo sceglierla in corrispondenza delle direzioni in cui i lobi laterali sono meno critici.

B.5.2.2 Metodo di sintesi continua di Fourier

Al fine di introdurre il metodo di sintesi di Fourier, è opportuno notare che, al crescere del numero N di elementi di un allineamento rettilineo equidistante a sfasamento lineare progressivo di lunghezza complessiva l , la sommatoria che esprime il fattore di cortina $F_c(\theta)$ tende ad un integrale che viene a coincidere con l'espressione della funzione di radiazione $F_l(\theta)$ nel caso di distribuzione continua di corrente filiforme lungo l'asse z (si veda anche il Cap. 3):

$$[B.5.8] \quad F_c(\theta) = \sum_{b=0}^{N-1} |a_b| e^{j b u} = \sum_{b=0}^{N-1} a_b e^{j b (k d \cos \theta + \delta)} \rightarrow F_l(\theta) = \int_{-l/2}^{l/2} |I(z')| e^{j(k z' \cos \theta + \delta z')} dz'$$

dove l'ultimo integrale può interpretarsi come il fattore di cortina di un allineamento di **dipoli elementari** allineati lungo z , ciascuno di modulo $|I(z')| dz'$, che formano la distribuzione di corrente filiforme continua $I(z)$, e δz è una eventuale variazione lineare della fase della corrente lungo z .

Viceversa, una distribuzione continua di corrente filiforme $I(z)$ può approssimarsi come un insieme finito di radiatori e.m., operando un'opportuna **discretizzazione**. Introducendo, infatti, una funzione a "rastrello" $\text{III}(z)$, pari alla somma di distribuzioni di Dirac equispaziate lungo l'asse z (considerando per semplicità solo le z positive):

$$\text{III}(z) = \delta(z) + \delta(z-1) + \delta(z-2) + \dots$$

possiamo moltiplicare la distribuzione di corrente $I(z)$ per una funzione a rastrello spaziata della quantità d , ovvero $\text{III}(z/d) = \delta(z) + \delta(z-d) + \delta(z-2d) + \dots$. In questo modo, la funzione di radiazione $F_l(\theta)$ viene approssimata da una sommatoria:

[B.5.9]

$$F_l(\theta) = \int_0^l I(z') \text{III}(z'/d) e^{j k z' \cos \theta} dz' \rightarrow F_c(\theta) = \sum_{b=0}^{N-1} I(bd) e^{j b k d \cos \theta} = \sum_{b=0}^{N-1} a_b e^{j b k d \cos \theta}$$

dove a_b è, in generale, un coefficiente complesso che include lo sfasamento δ . Operando una discretizzazione con passo d più fine, l'approssimazione di una sorgente continua con una discreta diventa sempre più valida. Quindi, sintetizzare la funzione di radiazione continua $F_l(\theta)$ ci consente di ricavare $I(z)$ e, quindi, i coefficienti a_b di alimentazione dell'allineamento.

Al fine di sfruttare le tecniche di sintesi di distribuzioni continue di corrente (**metodo di sintesi continua Fourier**), notando che la corrente $I(z)$ di una sorgente continua reale si annulla al di fuori di un certo intervallo di z , l'integrale $F_l(\theta)$ nell'eq. [B.5.8] può essere esteso all'infinito e riscritto nel modo seguente:

$$[B.5.10] \quad F_l(\theta) = F_l(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} |I(\zeta')| e^{j(k\zeta' \cos \theta + \delta \zeta')} d\zeta' = \int_{-\infty}^{\infty} |I(\zeta')| e^{j\xi \zeta'} d\zeta' = \mathfrak{F}\{ |I(\zeta)| \}$$

L'integrale nella precedente eq. [B.5.10] non è altro che la trasformata di Fourier \mathcal{F}

mono-dimensionale del modulo della corrente $|I(\zeta)|$, supposta trasformabile, e $\xi = k \cos \theta + \delta$ è la variabile trasformata. Se imponiamo una certa forma della funzione $F_l(\theta) = F_l(\xi)$, ovvero un certo fattore di cortina desiderato, potremo, quindi, scrivere la corrente come anti-trasformata di Fourier:

$$[B.5.11] \quad |I(\zeta)| = \mathfrak{F}^{-1}\{F_l(\xi)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_l(\xi) e^{-j\xi \zeta} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_l(\theta) e^{-j\xi \zeta} d\xi$$

Una volta imposto F_l , la anti-trasformata $|I(\zeta)|$ è, in genere, definita e diversa da zero su tutto l'asse $\zeta \in [-\infty, +\infty]$. Essendo la sorgente fisicamente limitata e di lunghezza l , la distribuzione di corrente dovrà essere troncata al di fuori dell'intervallo $[-l/2, +l/2]$. Pertanto, usando l'eq. [B.5.11] ed esprimendo la corrente che produce una determinata funzione di radiazione mediante l'operazione di anti-trasformazione, la corrente effettiva $|I_a(\zeta)|$ sarà data da:

$$[B.5.12] \quad |I_a(\zeta)| = \begin{cases} |I(\zeta)| & -l/2 \leq \zeta \leq +l/2 \\ 0 & \zeta \leq -l/2, \zeta \geq l/2 \end{cases}$$

con la sua trasformata (che differirà necessariamente da F_l):

$$[B.5.13] \quad F_a(\xi) = \mathfrak{F}\{ |I_a(\zeta)| \} = \mathfrak{F}\left\{ |I(\zeta)| \operatorname{rect}\left(\frac{\zeta}{l}\right) \right\}$$

esprimibile anche come:

$$F_a(\xi) = \int_{-l/2}^{l/2} |I(\zeta')| e^{j\xi \zeta'} d\zeta' = \mathfrak{F}\{ |I(\zeta)| \} \otimes \mathfrak{F}\left\{ \operatorname{rect}\left(\frac{\zeta}{l}\right) \right\}$$

dove rect è una funzione “rettangolo” definita sull'intervallo l (si veda Cap. 3 e 4) e l'ultima eguaglianza mostra la convoluzione tra le due trasformate.

È possibile **dimostrare** che il diagramma effettivo di radiazione dell'allineamento $F_a(\xi)$, trasformata di $|I_a(\zeta)|$, è una approssimazione del diagramma desiderato $F_l(\xi)$ tal che minimizza l'**errore quadratico medio** su tutto l'asse ξ . Questa condizione non è, però, verificata sulla porzione “visibile” (appartenente all'arco di visibilità) di ξ , corrispondente ad angoli θ reali. In altri termini, considerando solo la regione di visibilità, possono esistere approssimazioni migliori del diagramma di radiazione desiderato nel senso dei minimi quadrati.

Utilizzando il **metodo di sintesi continua Fourier** appena illustrato, si possono applicare tutte le note proprietà della trasformata di Fourier per legare le diverse caratteristiche del diagramma di radiazione (ad esempio larghezza del lobo principale o ampiezza dei lobi secondari) a quelle della distribuzione di corrente, e

viceversa. In figura B.5.4 è illustrato l'esempio di un progetto per fattore di cortina $F_c(\theta)$ costante, diverso da zero in un intervallo angolare di 90° e nullo all'esterno, ovvero espresso da una funzione "rettangolo" del tipo $\text{rect}(\theta/\pi/2)$. L'anti-trasformata di Fourier $|I_a(z)|$ della funzione rettangolare è illimitata di tipo seno-cardinale (*sinc*), come risulta dall'eq. [B.5.11]. Il suo troncamento, espresso dall'eq. [B.5.12], determina un diagramma di radiazione effettivo $F_a(\theta)$ che approssima quello voluto, come in eq. [B.5.13], ma presenta dei fenomeni di oscillazione tanto maggiori quanto più l'antenna (o, meglio, l'allineamento di antenne) di dimensioni l è corta. In questo esempio specifico le forti oscillazioni derivano dall'aver imposto un diagramma di radiazione del fattore di cortina $F_c(\theta)$ discontinuo ai bordi.

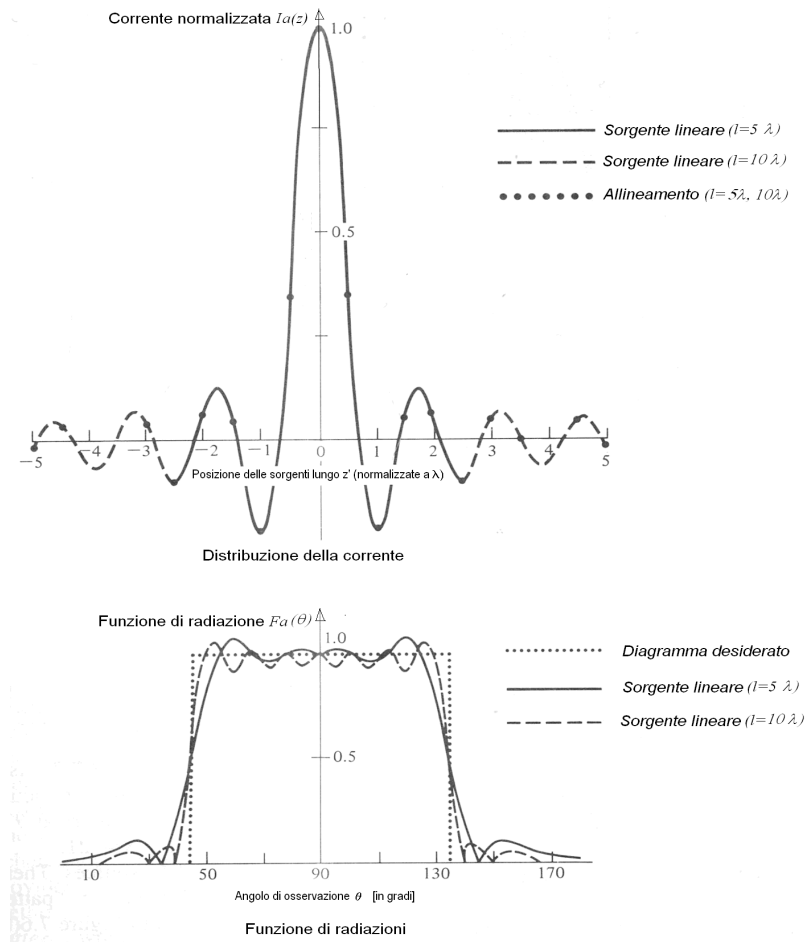


FIGURA B.5.4. Distribuzione di corrente I_a (normalizzata al massimo), sintetizzata da una funzione di radiazione di tipo rettangolare, e diagramma di radiazione risultante con antenne di diversa lunghezza l .

B.5.2.3 Metodo di sintesi discreta di Fourier

Abbiamo visto, come il fattore di cortina $F_c(u)=F_c(\theta)$ sia una combinazione lineare di termini e^{jbu} (si veda eq. [B.5.5], per esempio) ed è, pertanto, una funzione periodica in u con periodo $T=2\pi$. I coefficienti $|a_b|$ coincidono con i termini dello sviluppo in serie di Fourier della funzione. Il **metodo di sintesi discreta** consiste, quindi, nell'imporre la forma del fattore di cortina $F_c(u)$ periodico mediante un'opportuna **serie di Fourier troncata**. A tal fine bisognerà aggiungere degli zeri fittizi eventualmente, fino all'occorrenza di $u=2\pi$. Scelto, poi, il numero di elementi N , le ampiezze $|a_b|$ dei singoli elementi dell'allineamento saranno fornite dalle formule che esprimono lo sviluppo in serie di Fourier di una funzione periodica.

È opportuno scrivere il fattore di cortina $F_c(u)$, rispetto ad una origine del sistema di riferimento al centro dell'allineamento (si veda il Cap. 6 sugli allineamenti simmetrici. Per i coefficienti $|a_b|$ l'**equazione di progetto** si scrive, nel caso di numero di elementi dispari $N=2M+1$ (esiste un elemento centrale a_0):

$$[B.5.14] \quad F_c(u) = \sum_{i=-M}^{i=M} |a_i| e^{j i u} \quad \text{con} \quad |a_i| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_c(u) e^{-j i u} du, \quad -M \leq i \leq M$$

mentre nel caso di numero di elementi pari $N=2M+1$:

$$[B.5.15] \quad F_c(u) = \sum_{i=-M}^{i=-1} a_i e^{j[(2i+1)/2]u} + \sum_{i=1}^{i=M} a_i e^{j[(2i-1)/2]u}$$

$$\text{con} \quad a_i = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_c(u) e^{-j[(2i+1)/2]u} du & -M \leq i \leq -1 \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_c(u) e^{-j[(2i-1)/2]u} du & 1 \leq i \leq M \end{cases}$$

Per direzioni θ reali (nell'arco di visibilità) $u = kd \cos \theta + \delta$ assume valori da $-kd + \delta$ a $+kd + \delta$, e se vogliamo che la regione di visibilità sia limitata ad un solo periodo della funzione $F_c(u)$ per evitare "sfogliamenti" del diagramma di radiazione (in inglese, *grating lobes*), dovremo scegliere necessariamente $2kd \leq 2\pi$, ovvero distanze tra gli elementi $d \leq \lambda/2$. Con riferimento al cerchio di visibilità, ciò significa che esso rimane all'interno del periodo 2π , qualunque sia la scelta di δ , sia nel caso *broadside* che in quello *end-fire*.

B.5.2.4 Metodo di sintesi di Woodward-Lawson

Assumiamo che la corrente $I(\zeta)$ di una sorgente continua (tra $-l/2$ e $l/2$) si possa esprimere come somma di un numero finito N di sorgenti $i_m(\zeta)$ con modulo uniforme pari a b_m e fase linearmente crescente lungo ζ , ovvero:

$$[B.5.16] \quad i_m(\zeta') = \frac{b_m}{l} e^{-jk\zeta' \cos \theta_m} \quad \text{con} \quad -l/2 \leq \zeta' \leq l/2$$

da cui:

$$[B.5.17] \quad I(\zeta') = \sum_m i_m(\zeta') = \frac{1}{l} \sum_m b_m e^{-jk\zeta' \cos \theta_m} \quad \text{con} \quad -l/2 \leq \zeta' \leq l/2$$

Fissata la lunghezza l e il numero di componenti armoniche N , la tecnica di **sintesi di Woodward-Lawson** consiste nello scegliere N angoli di campionamento della funzione di cortina in base alla relazione:

$$[B.5.18] \quad \theta_m = \cos^{-1} \left(m \frac{\lambda}{l} \right) \quad \text{con} \quad m=1, 2, \dots, N$$

Imposti in quelle direzioni valori della funzione di radiazione $F_c(\theta_m)$ che soddisfano i requisiti di progetto, si dimostra che le ampiezze delle componenti armoniche sono uguali proprio ai valori scelti della funzione di radiazione nelle direzioni θ_m :

$$[B.5.18] \quad b_m = F_c(\theta) \big|_{\theta=\theta_m} = F_c(\theta_m)$$

Dimostrazione: sintesi di Woodward-Lawson

Ciascuna sorgente uniforme ha una funzione di radiazione $F_m(u)=F_m(\theta)$ pari alla trasformata di Fourier di una funzione di illuminazione rettangolare, che coincide come è noto con una funzione $l \text{sinc}[l(u/2\pi)]$:

$$F_m(u) = \int_{-\infty}^{\infty} i_m(\zeta') e^{jk\zeta' \cos \theta} d\zeta' = \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} b_m e^{+jk\zeta' \cos \theta - jk\zeta' \cos \theta_m} d\zeta' = b_m \frac{\sin \left[\frac{kl}{2} (\cos \theta - \cos \theta_m) \right]}{\frac{kl}{2} (\cos \theta - \cos \theta_m)}$$

Il massimo di $F_m(\theta)$ si ha nel limite per cui $\theta=\theta_m$. Per la proprietà di linearità la funzione di radiazione di cortina $F_c(u)$ dell'antenna si ottiene come somma dei singoli contributi:

$$F_c(u) = \sum_m F_m(u) = \sum_m b_m \frac{\sin \left[\frac{kl}{2} (\cos \theta - \cos \theta_m) \right]}{\frac{kl}{2} (\cos \theta - \cos \theta_m)}$$

Cerchiamo ora di determinare la condizione sui θ_m per cui dove una determinata $F_m(\theta)$ è massima tutte le altre sono nulle. Tale condizione si verifica se sussiste la seguente:

$$\frac{kl \cos \theta_m}{2} = m\pi$$

con m intero, per cui l'argomento della funzione seno a numeratore della $F_m(\theta)$ in ogni θ_n diverso da θ_m vale $(n-m)\pi$, ovvero è un multiplo intero di π , ove il seno si annulla. Ciò accade quando:

$$\cos \theta_m = m \frac{\lambda}{l} \quad \Rightarrow \quad \theta_m = \cos^{-1} \left(m \frac{\lambda}{l} \right)$$

ed al verificarsi di questa condizione la funzione di radiazione $F(\theta)$ per $\theta=\theta_m$ coincide proprio con il valore massimo b_m della relativa funzione armonica $F_m(\theta)$ associata, come si doveva dimostrare.

□

B.6 Esercizi e domande di riepilogo

Gli argomenti trattati nell'Appendice B.6 riguardano:

- domande teoriche di verifica dell'apprendimento di concetti e metodi di analisi di antenne;
- esercizi numerici su varie applicazioni dei concetti principali e metodi di analisi di antenne e problemi di radiocollegamento (con soluzione numerica);
- esempio di uso di un simulatore numerico per l'analisi di antenne (CAD), mediante il programma gratuito MiniNEC;
- formulari riassuntivi come ausilio alla verifica dell'apprendimento e strumento di supporto alla risoluzione di problemi numerici.

B.6.1 Domande teoriche

La seguente lista di domande è individuata, per convenienza, da un numero latino per indicare il capitolo e un numero corrente di elenco (sintassi X.n con X=I,II,...,VI e n=1,2,3,...).

DOMANDA I.1

Si consideri un'antenna con perdite ohmiche in un mezzo assimilabile al vuoto. Si descriva in modo sintetico, ma esaustivo:

- il circuito equivalente di tipo serie in trasmissione e ricezione dell'antenna, illustrando il significato fisico dei vari elementi attraverso il teorema di Poynting;
- il legame tra lunghezza elettrica equivalente e area equivalente in una data direzione di puntamento e in condizioni di efficienza di polarizzazione e disadattamento unitarie e di massimo trasferimento di potenza.

Soluzione: a), b) S consulti il testo al Cap. 1 e Cap.3 per la lunghezza equivalente.

DOMANDA I.2

Si consideri un'antenna a dipolo corto simmetrico con perdite ohmiche σ_a , non caricata alle estremità e immersa in un mezzo dissipativo con costanti primarie ϵ , μ e σ . Si descriva in modo sintetico, ma esaustivo:

- a) il circuito equivalente di tipo parallelo e serie in trasmissione e ricezione dell'antenna, illustrando il significato elettromagnetico dei vari elementi mediante il teorema di Poynting;
- b) l'espressione per il calcolo della resistenza di perdita ohmica dimostrando che risulta nota a partire dalla conoscenza dell'andamento della corrente sul dipolo e della resistività superficiale del conduttore.

Soluzione: a), b) Si consulti il testo al Cap. 1 e Cap.2 per la resistenza di perdita.

DOMANDA II.1

Si consideri una sorgente elettrica volumetrica in spazio libero, caratterizzata da una densità di corrente elettrica impressa \mathbf{J}_i in un volume V . Si deduca in modo sintetico, ma esaustivo:

- a) il metodo della funzione di Green per il calcolo del potenziale elettrodinamico associato;
- b) l'espressione approssimata della funzione di Green in campo lontano, evidenziandone i limiti e il significato geometrico, e la distanza critica di campo lontano per uno sfasamento massimo pari a $\pi/8$.

Soluzione: a,b) Si consulti il testo di Teoria al Cap. 2. Si noti che le sorgenti possono essere elettriche e/o magnetiche.

DOMANDA II.2

Sia assegnata una densità di corrente magnetica impressa \mathbf{J}_{mi} in un mezzo assimilabile al vuoto. Scegliendo una superficie arbitraria S che racchiuda le sorgenti note, si dimostri

- a) il teorema di equivalenza per il calcolo del campo e.m. all'esterno di S .
Si deducano, inoltre, le espressioni delle densità di corrente superficiale equivalenti nel caso in cui:
- b.1) nel volume racchiuso da S sia assegnato un campo e.m. arbitrario \mathbf{E}_0 e \mathbf{H}_0 ;
- b.2) il volume racchiuso da S si riduca a un semispazio delimitato da una superficie piana e riempito di conduttore elettrico perfetto.

Soluzione: a) Si consulti il testo di Teoria al Cap. 2; b) Si applichi il teo. di equivalenza e il teo. delle immagini.

DOMANDA II.3

Sia assegnata una densità di corrente elettrica impressa \mathbf{J}_i in un mezzo assimilabile al vuoto libero da altre sorgenti (spazio libero). Utilizzando la teoria dei potenziali elettrodinamici e l'approssimazione di campo lontano, si ricavi l'espressione in coordinate sferiche del campo magnetico \mathbf{H} irradiato a grande distanza dalla sorgente assegnata. Si noti che valgono le seguenti identità vettoriali: $\mathbf{r}_0 \times \boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{\varphi}_0$ e $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$.

Inoltre, assumendo la condizione di Lorenz e ricordando che sussiste la seguente relazione tra campo elettrico \mathbf{E} e potenziale magnetico \mathbf{A} nel dominio della frequenza:

$$\mathbf{E} = -j\omega\mu_0\mathbf{A} + \nabla\nabla \cdot \mathbf{A}/(j\omega\epsilon_0)$$

si deduca:

- II.a) l'espressione in coordinate sferiche del campo elettrico \underline{E} irradiato a grande distanza;
- II.b) il rapporto tra i moduli di \underline{E} e \underline{H} e il contributo della componente radiale delle sorgenti impresse al campo e.m. irradiato.

Soluzione: a) Si usi l'approssimazione $\underline{V} \approx jk\epsilon_0 \underline{r}_0$ e le identità vettoriali; b) $|\underline{E}|/|\underline{H}|=\eta$; contributo nullo della comp. radiale (J_r) di \underline{J}_i .

DOMANDA III.1

Sia assegnato un dipolo elettrico di forma cilindrica, costituito da un CEP di sezione circolare con raggio a e alimentato al centro attraverso un taglio di dimensione infinitesima con una tensione impressa di fasore pari a V_0 . Si ricavi nel dominio della frequenza:

- a) l'equazione integrale di Hallen per la corrente che scorre sul dipolo;
- b) una soluzione approssimata della precedente equazione integrale.

Soluzione: a) si applichi il teo. di induzione e la teoria dei pot. elettrodinamici. b) si effettui l'approssimazione di dipolo sottile.

DOMANDA III.2

Si consideri un'antenna a dipolo simmetrica non caricata con perdite ohmiche in un mezzo assimilabile al vuoto. Si descriva in modo sintetico, ma esaustivo:

- a) il circuito equivalente di tipo serie in ricezione dell'antenna, illustrando il significato elettromagnetico dei vari elementi;
- b) la definizione di lunghezza elettrica equivalente in funzione della corrente $I(z)$ e il suo legame con il campo elettrico irradiato.

Soluzione: a,b) Si consulti il testo di Teoria al Cap. 3. Si noti che i circuiti equivalenti sono definibili per ogni antenna.

DOMANDA IV.3

Sia data un'antenna ad apertura rettangolare illuminata uniformemente e a polarizzazione lineare. Nell'ipotesi di fattorizzabilità dell'illuminazione, si deduca in modo sintetico, ma esaustivo:

- a) la funzione di radiazione e la larghezza nullo-nullo del lobo principale sul piano E e H per un cerchio di visibilità di raggio pari a 3π ;
- b) l'area equivalente massima, la direttività massima e l'efficienza di apertura.

Soluzione: a) Si consulti il testo di Teoria al Cap. 4; b) Si applichi il teo. di Schwartz ovvero la definizione di D .

DOMANDA IV.4

Sia data un'antenna ad apertura rettangolare, di dimensione $a/\lambda=3$ lungo x e $b/\lambda=2$ lungo y , illuminata uniformemente in ampiezza e fase costante con polarizzazione lineare lungo y . Nell'ipotesi di fattorizzabilità dell'illuminazione, si deduca in modo sintetico, ma esaustivo:

- a) la funzione di radiazione e la larghezza nullo-nullo del lobo principale sul piano E e H e il relativo diagramma polare sul cerchio di visibilità;

- b) l'area equivalente massima, la direttività massima e l'efficienza di apertura nel caso di illuminazione di ampiezza sia uniforme che triangolare lungo x .

Soluzione: a) Si consulti il testo di Teoria al Cap. 4; b) Si consideri il caso particolare di illuminazione triangolare.

DOMANDA IV.5

Si consideri un'antenna a dipolo corto simmetrico con perdite ohmiche σ_a , non caricata alle estremità e immersa in un mezzo dissipativo con costanti primarie ϵ , μ e σ .

Si descriva in modo sintetico, ma esaustivo:

- il circuito equivalente di tipo parallelo e serie in trasmissione e ricezione dell'antenna, illustrando il significato elettromagnetico dei vari elementi mediante il teorema di Poynting;
- l'espressione per il calcolo della resistenza di perdita ohmica dimostrando che risulta nota a partire dalla conoscenza dell'andamento della corrente sul dipolo e della resistività superficiale del conduttore.

Soluzione: a,b) Si consulti il testo di Teoria al Cap. 3.

DOMANDA IV.6

Sia data un'antenna a tromba di tipo settoriale (rastremata) sul piano E. Nell'ipotesi di antenna immersa nel vuoto e conduttori elettrici perfetti, si calcoli:

- l'espressione della funzione di illuminazione vettoriale in ampiezza e fase;
- il valore ottimo della dimensione rastremata, fissato il valore dell'ingombro longitudinale.

Soluzione: a,b) Si consulti il testo di Teoria al Cap. 4.

DOMANDA V.1

Sia data un'antenna a riflettore parabolico con illuminatore di intensità di radiazione $U_i(\theta, \varphi)$. Nell'ipotesi di antenna immersa nel vuoto e conduttori elettrici perfetti, si dimostri che:

- il riflettore parabolico con illuminatore nel fuoco ha proprietà di collimazione in trasmissione e focalizzazione in ricezione mediante approssimazioni di ottica geometrica;
- la densità di potenza sulla bocca (apertura) proiettata del riflettore ha un andamento rastremato e come da questa sia possibile calcolare il campo e.m. irradiato in zona lontana.

Soluzione: a,b) Si consulti il testo di Teoria al Cap. 5.

B.6.2 Esercizi numerici

La seguente **lista di esercizi**, con soluzione numerica, si riferisce a:

- analisi di collegamenti di antenne;
 - analisi di funzioni di direttività di antenne;
 - analisi di radiazione e.m.;
-

- analisi di antenne lineari a dipolo;
- antenne ad apertura;
- allineamenti di antenne;
- sistemi di comunicazione.

B.6.2.1 Esercizi su collegamenti e.m. tra antenne

Esercizio C.1: POTENZA TRASMESSA IN UN COLLEGAMENTO SATELLITARE

Due satelliti sono separati da una distanza $R=100$ Mm. Hanno antenne con direttività massima $D_M=1000$ operanti a 2.5 GHz. Il ricevitore di uno dei satelliti richiede in ingresso una potenza $W_R=20$ dBp (rispetto a 1 pWatt). Nell'ipotesi allineamento tra le 2 antenne ed efficienze di antenna unitarie, si calcoli:

- la potenza W_T deve irradiare il trasmettitore dell'altro satellite.

Soluzione: $W_T=10.96$ kW.

Esercizio C.2: POTENZA RICEVUTA IN UN COLLEGAMENTO

Sia data un'antenna in trasmissione alla frequenza $f=1$ GHz con guadagno massimo pari a $G_T=25$ dB e potenza trasmessa pari a $W_T=150$ W. Nell'ipotesi allineamento tra le 2 antenne ed efficienze di antenna unitarie, si calcoli:

- la massima potenza ricevuta ad una distanza di $R=0.5$ km in un collegamento in spazio libero tra l'antenna trasmittente fornita e un'antenna ricevente con $G_R=20$ dB di guadagno massimo.

Soluzione: $W_R=10.8$ mW.

Esercizio C.3: TEMPERATURA DI RUMORE DI ANTENNA

Un'antenna è puntata verso lo zenith e posta su una superficie terrestre non riflettente. Il 90% dell'angolo solido di radiazione Ω_A è contenuto in un angolo di 45° dallo zenith, l'8% di Ω_A è compreso tra 45° dallo zenith e l'orizzonte. La temperatura di brillanza del cielo tra lo zenith e 45° è di 5K, tra 45° e l'orizzonte vale 50 K, mentre sotto l'orizzonte la terra ha temperatura di brillanza pari a 300 K. Calcolare la temperatura di rumore di antenna T_A alla porta di uscita dell'antenna nel caso

- di antenna senza perdite;
- di antenna con efficienza di radiazione $\eta_r=0.99$ e temperatura fisica $T_0=300$ K.

Soluzione: a) Antenna senza perdite $T_A=14.50$ K; b) Antenna con perdite $T_A=17.35$ K.

Esercizio C.4: RAPPORTO SEGNALE-RUMORE PER UN'ANTENNA IN RICEZIONE

Un antenna a riflettore parabolico di diametro $l=3$ m e rendimento (efficienza) di apertura $\eta_a=0.5$ riceve un segnale dal satellite posto alla distanza $R=36000$ km. La potenza irradiata isotropica efficace (EIRP) del trasmettitore è pari a 35 dBW, la banda $B=30$ MHz, la temperatura di rumore antenna e di ricevitore pari a 75 K e 25 K, rispettivamente.

- Calcolare il rapporto segnale-rumore (S/N) all'uscita dell'antenna in decibel supponendo l'efficienza totale di antenna unitaria.

- b) Calcolare la dimensione l dell'antenna che garantisca un rapporto S/N di 10 dB.
Soluzione: a) S/N=12.19 dB; b) $l=2.33$ m.

Esercizio C.5: POTENZA RICEVUTA IN UN COLLEGAMENTO SATELLITARE

Un collegamento terra-satellite ha le seguenti caratteristiche di sistema.

- Parametri sistema di terra:

Guadagno d'antenna: $G_T=54$ dB

Attenuazione nella linea di trasmissione: $L_f=-2$ dB

Potenza trasmessa: $W_T=1250$ W (ovvero 30.97 dBW)

Distanza: $R=37132$ km

Frequenza tratta in salita (*up-link*) $f_u=14$ GHz

- Parametri sistema satellitare

Guadagno d'antenna: $G_S=36$ dB

Potenza trasmessa: $W_S=200$ W (ovvero 23.01 dBW)

Frequenza tratta in discesa (*down-link*) $f_d=12$ GHz

Calcolare la potenza ricevuta W_R nella:

a) tratta in discesa del collegamento terra-satellite;

b) tratta in salita del collegamento terra-satellite.

Soluzione: a) *Tratta in discesa (downlink):* $W_R=3 \cdot 10^{-10}$ W (ovvero -94.4 dBW).
 b) *Tratta in salita (uplink):* $W_R=1.66 \cdot 10^{-9}$ W (ovvero -87.8 dBW).

ESERCIZIO C.6: COLLEGAMENTO TRA ANTENNE

Si consideri un collegamento inclinato terra-satellite tra due antenne allineate. Nell'ipotesi di terra piatta e atmosfera stratificata verticalmente, siano assegnati i seguenti dati:

- frequenza del collegamento pari a 30 GHz in atmosfera;
- EIRP (Effective Isotropic Radiated Power) dell'antenna satellitare pari a 60 dB;
- angolo zenitale di inclinamento del collegamento pari a 60° (ovvero, angolo di elevazione sull'orizzonte pari a 30°);
- distanza zenitale (verticale) tra l'antenna satellitare e l'antenna a terra pari a 36000 km;
- attenuazione zenitale di percorso tra 0 km (superficie terrestre) e 5 km di quota pari a 1 dB/km e nulla altrove (per $z>5$ km);
- guadagno massimo dell'antenna a terra, calcolato alla porta di uscita, pari a 50 dB;
- rapporto di potenza segnale-rumore alla porta di uscita dell'antenna a terra pari a 30 dB.

Si ricavano:

a) la potenza ricevuta alla porta di uscita dell'antenna di terra;

b) la potenza di rumore alla porta di uscita dell'antenna di terra.

Soluzione: a) $W_R=1.22$ pW=-119.13 dBW; b) $W_R=1.22 \cdot 10^{-3}$ pW= -149.13 dBW. Si ricordi che $\alpha[\text{dB}/\text{km}]=4.343 \alpha[1/\text{km}]$.

ESERCIZIO C.7: COLLEGAMENTO TRA ANTENNE IN MEZZO DISSIPATIVO

Si consideri un ponte radio terrestre con tratta di 10 km in atmosfera omogenea e dissipativa (i.e., con costanti primarie ϵ_0 , μ_0 e σ), caratterizzata da un'attenuazione specifica α in potenza. Siano date le seguenti specifiche del collegamento:

- frequenza della portante in atmosfera pari a 3 GHz;
- potenza trasmessa pari a 100 W con efficienza di radiazione di 0.9 e direttività massima di 30 dB;
- rapporto segnale-rumore in ricezione di 30 dB con guadagno massimo dell'antenna ricevente di 30 dB e banda relativa di 100 MHz;
- rapporto G/T in ricezione pari a 1 K⁻¹.

Nell'ipotesi di allineamento delle antenne, calcolare:

- a) la potenza di rumore (in dBW) all'uscita dell'antenna in ricezione (si ricordi che la costante di Boltzman è $k=1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K);
- b) il valore dell'attenuazione specifica α (in dB/km) del mezzo.

Soluzione: a) $W_N = -118.6$ dBW; b) $\alpha = 4.6$ dB/km. Si ricordi che $\alpha[\text{dB/km}] = 4.343 \alpha[\text{Np/km}]$.

B.6.2.2 Esercizi su direttività ed efficienza di antenne

Esercizio D.1: DIRETTIVITÀ DI UN'ANTENNA

Consideriamo tre antenne aventi le seguenti intensità di radiazione:

$$\begin{aligned} \text{Antenna A:} & \quad U_m \sin \theta \sin^2 \varphi \\ \text{Antenna B:} & \quad U(\theta, \varphi) = U_m \sin \theta \sin^3 \varphi \quad \text{con} \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{matrix} \quad \text{e} \quad U(\theta, \varphi) = 0 \text{ altrove} \\ \text{Antenna C:} & \quad U_m \sin^2 \theta \sin^3 \varphi \end{aligned}$$

- a) Calcolare il valore esatto della direttività delle tre antenne.
- b) Calcolare il valore approssimato della direttività a partire dalle larghezze del lobo a metà potenza.

Soluzione: a) Valori esatti: 5.09; 6.00; 7.07. b) Valori approssimati: 3.79; 4.56; 6.08.

Esercizio D.2: DIRETTIVITÀ CON RADIAZIONE A COSENO RIALZATO

Consideriamo un'antenna avente la seguente intensità di radiazione dipendente da un coefficiente di rastremazione n :

$$U(\theta, \varphi) = \begin{cases} U_m \cos^n \theta & \text{con } 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

- a) Calcolare il valore esatto della direttività massima dell'antenna nel caso $n=1$.
- b) Calcolare il valore approssimato della direttività massima a partire dalle larghezze del lobo a metà potenza.

Soluzione: a) $D_M = 4$; b) $D_M \approx 2.8B$.

Esercizio D.3: DIRETTIVITÀ DI UN'ANTENNA A FASCIO GAUSSIANO

Consideriamo un'antenna a fascio gaussiano:

$$U(\theta, \varphi) = \begin{cases} U_m e^{-(\theta/\theta_0)^2} & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Il parametro θ_0 è legato alla dimensione caratteristica dell'antenna l , essendo $\theta_0 = \lambda/l$. Assumendo l'antenna sia molto direttiva (ovvero antenna con fascio a pennello con $\theta_0 \ll 1$) e la frequenza di lavoro pari a 30 GHz:

- Calcolare il valore esatto della direttività massima, anche in dB, dell'antenna e la dimensione dell'antenna quando la larghezza del lobo a metà potenza è $\Theta_{1/2} = 1.6^\circ$.
- Calcolare il valore esatto della direttività massima, anche in dB, dell'antenna e la dimensione dell'antenna quando la larghezza del lobo a metà potenza è $\Theta_{1/2} = 16.6^\circ$.

Soluzione: a) $D_M = 14237$ (41.5 dB), $l = 57$ cm quando $\Theta_{1/2} = 1.6^\circ$; $D_M = 132$ (21.2 dB), $l = 5.7$ cm quando $\Theta_{1/2} = 16.6^\circ$.

ESERCIZIO D.4: EFFICIENZA DI RADIAZIONE DI UN'ANTENNA DIPOLARE

Un'antenna alimentata da una corrente I_g (valore di picco) ha intensità di radiazione:

$$U(\theta, \varphi) = a I_g^2 \sin^2 \theta \quad \text{con} \quad \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

Assumendo $a=1$, calcolare l'efficienza di radiazione η_r nel caso di resistenza di perdita $R_L = 0.5$ W.

Soluzione: $\eta_r = 0.97$. *Nota: se si assume $a \ll 1$, è il caso di antenna lineare corta non caricata.*

ESERCIZIO D.5: DIRETTIVITA' DI ANTENNE OMNI-DIREZIONALI

Si consideri un'antenna di dimensione massima pari a 1 m operante alla frequenza di 1 GHz. Di tale antenna avente efficienza di polarizzazione unitaria, siano noti i seguenti parametri:

- intensità di radiazione normalizzata $U_n(\theta) = (\cos \theta)^2$ con θ angolo zenitale rispetto all'asse z di puntamento dell'antenna;
- resistenza di perdita ohmica pari a 1 Ω e resistenza di radiazione pari a 10 Ω ;
- rapporto d'onda stazionaria in tensione alla porta di uscita dell'antenna pari a 6 dB.

Si ricavano:

- la direttività e il guadagno generalizzato dell'antenna nella direzione del massimo e per $\theta = 10^\circ$, tenendo conto dell'efficienza totale;
- la distanza limite di campo lontano per uno sfasamento massimo pari a $\pi/8$ e $\pi/2$.

Soluzione: a) $D(0^\circ) = 3$, $D(10^\circ) = 2.9$; $G(0^\circ) = 2.4$, $G(10^\circ) = 2.3$; si noti che $VSWR$ è dato in tensione; b) $r_f = 6.67$ m se $\Delta\phi = \pi/8$, $r_f = 1.67$ m se $\Delta\phi = \pi/2$.

ESERCIZIO D.6: DIRETTIVITA' DI ANTENNE CON FASCIO A PENNELLO

Si consideri un'antenna con fascio a pennello (gaussiano), la cui intensità di radiazione a grande distanza sia approssimabile analiticamente mediante la seguente espressione:

$$U(\theta, \varphi) = U_M e^{-(\ln 2)(\theta/\theta_c)^2}$$

dove $U_M = 10 \text{ Wsr}^{-1}$ e $\theta_c = 1^\circ$. Nell'ipotesi di antenna molto direttiva (e.g., $\sin\theta \approx \theta$), calcolare:

2.a) la larghezza del fascio a metà potenza o a -3 dB , l'angolo solido di radiazione (in sr) e la direttività massima (in dB).

2.b) la potenza trasmessa (in dBm) a grande distanza.

Soluzione: a) $\Theta_{3\text{dB}} = 2^\circ$; $\Omega_A = 1.38 \cdot 10^{-3} \text{ sr}$; $D_M = 39.5 \text{ dB}$; b) $W_T = 11.4 \text{ dBm}$.

B.6.2.3 Esercizi su radiazione e.m. da antenne

ESERCIZIO R.1: CAMPO E.M. IRRADIATO MEDIANTE TEOREMA DI RECIPROCIITÀ

Si consideri un'antenna sotto prova (EUT, Equipment Under Test), caratterizzata da sole sorgenti elettriche impresse J_T , da dimensione massima $L_m = 2 \text{ m}$ e frequenza centrale di trasmissione $f = 900 \text{ MHz}$. Il campo e.m. irradiato da tale antenna sia misurato da un'antenna sonda filiforme (PA, Probe Antenna) avente sezione trasversa elettricamente piccola ($\ll \lambda$) e lunghezza $l = 1 \text{ mm}$. Dato un sistema di coordinate sferiche centrato sull'antenna EUT, nel punto $P = [r = r_F, \theta = \pi/2, \varphi = \pi/2]$ ove r_F è la distanza limite di campo lontano dell'antenna EUT si abbia:

- che la corrente indotta dal campo dell'antenna EUT sull'antenna PA sia pari a $I_{oz} = 1 \text{ mA}$ nella direzione e verso di z (e nulla in ogni altra direzione appartenente al piano tangente in $r = r_F$);
- che la reazione dell'antenna sonda (Probe) sull'antenna in prova (Test) sia pari a $I_{\text{reazTP}} = 10^{-5} \text{ AV}$.

In condizioni di radiazione in spazio libero da altre sorgenti, si calcoli:

- a) la distanza limite r_F di campo lontano dell'antenna EUT;
- b) il modulo del campo elettrico e magnetico irradiato dall'antenna EUT nel punto P ;
- c) le densità di corrente equivalenti elettriche \underline{K} e magnetiche \underline{K}_m nel punto P ;
- d) il modulo del campo elettrico irradiato dall'antenna EUT nel punto $Q = [r = 2 r_F, \theta = \pi/2, \varphi = \pi/2]$.

Soluzione: a) 24 m ; b) 10 V/m ; c) $\underline{K} \approx -0.026 \exp(-j457) \underline{z}_0 \text{ A/m}$; $\underline{K}_m = -10 \exp(-j457) \underline{x}_0 \text{ V/m}$; d) 5 V/m .

ESERCIZIO R.2: CAMPO E.M. DA DIPOLO IN PRESENZA DI PIANO CONDUTTORE

Si consideri un dipolo elettrico elementare di lunghezza $l = 1 \text{ cm}$, di sezione avente raggio $a = 1 \text{ mm}$, resistenza superficiale $R_s = 0.614 \Omega$ e corrente massima costante pari a 1 mA . Se la frequenza di lavoro è 900 MHz , calcolare:

- a) la distanza limite r_F di campo lontano del dipolo in spazio libero;
- b) la potenza irradiata W_r , la resistenza di radiazione R_r e l'efficienza di radiazione η_r in spazio libero;
- c) in presenza di piano conduttore elettrico perfetto (CEP) a distanza d dal dipolo, la resistenza di radiazione R_r e l'efficienza di radiazione η_r nel caso in cui $d = 0$ e il dipolo sia parallelo al piano CEP;
- d) in presenza di piano CEP a distanza d dal dipolo, la resistenza di radiazione R_r e l'efficienza di radiazione η_r nel caso in cui $d = 0$ e il dipolo sia ortogonale al piano CEP;

- e) la resistenza di radiazione R_r e l'efficienza di radiazione η_r di un dipolo identico a quello dato, ma lungo $l_d=2l$ in condizioni di radiazione in spazio libero.

Soluzione: a) $r_F=0.6 \text{ mm}$; b) $W_r=0.36 \text{ }\mu\text{W}$, $R_r=0.72 \text{ }\Omega$, $\eta_r=0.40$; c) $R_r=0 \text{ }\Omega$, $\eta_r=0$; d) $R_r=1.44 \text{ }\Omega$, $\eta_r=0.59$; e) $R_r=2.88 \text{ }\Omega$, $\eta_r=0.74$. *Nota: si utilizza il teorema di reciprocità.*

B.6.2.4 Esercizi su antenne lineari a dipolo

ESERCIZIO L.1: DIPOLI NON CARICATI

Si consideri un'antenna a dipolo non caricato alimentata al centro immersa in un mezzo con permeabilità magnetica relativa $\mu_r=1$, costante dielettrica relativa $\epsilon_r=4$ e conducibilità nulla. Per tale antenna con efficienza di antenna unitaria, siano note in ricezione nella direzione di massima radiazione le seguenti misure di:

- tensione a vuoto pari a 7 V;
- corrente di corto circuito pari a 0.1 A;
- densità di potenza incidente pari a 100 mW/m^2 , dovuta a onda piana uniforme monocromatica.

Si calcolino:

- a) l'area equivalente massima;
- b) a parità di area equivalente, la frequenza dell'onda piana incidente nel caso in cui l'antenna si comporti in ricezione come un dipolo a semionda non-caricato.

Soluzione: a) $A_{eM}=0.875 \text{ m}^2$; b) $f=57.9 \text{ MHz}$; si noti che sia η che v (velocità della luce nel mezzo) differiscono dai rispettivi valori nel vuoto.

ESERCIZIO L.2: DIPOLI IN RICEZIONE

Si consideri un'antenna a dipolo cilindrico corto non caricato, alimentata al centro e immersa in un mezzo con permeabilità magnetica relativa $\mu_r=1$, costante dielettrica relativa $\epsilon_r=9$ e conducibilità nulla. Per tale antenna con efficienza di adattamento e polarizzazione unitarie e reattanza di ingresso trascurabile, siano note:

- la lunghezza del dipolo pari a 10 cm, il raggio della sua sezione trasversale pari a 1 cm e la sua resistenza specifica $R_s=B.14 \text{ }\Omega$;
- il modulo del campo elettrico dell'onda piana uniforme incidente pari a 10 V/m e relativa potenza ricevuta di 47.34 mW .

Per tale dipolo corto in spazio libero (da altre sorgenti e ostacoli), calcolare:

- a) la resistenza di radiazione (in Ω) ed efficienza di radiazione, calcolando le perdite con il modello a corrente costante;
- b) la corrente di corto circuito (in A), caratteristica del circuito equivalente parallelo in ricezione dell'antenna.

Soluzione: a) $R_r=0.65 \text{ }\Omega$; $\eta_r=0.06$; si noti che sia η che λ differiscono dai rispettivi valori nel vuoto; b) $I_a=48 \text{ mA}$ usando l'informazione sulla resistenza di perdita (e non la lunghezza magnetica dell'antenna).

ESERCIZIO L.3: MONOPOLO IN RICEZIONE

Si consideri un monopolo cilindrico non caricato su piano conduttore perfetto, alimentato alla base e immerso in un mezzo con costanti primarie $\mu_r=1$, $\epsilon_r=2$ e $\sigma=0 \text{ S/m}$. Il monopolo cilindrico abbia una lunghezza di 1 m, una sezione circolare di

raggio di 1 cm, una resistività superficiale di $0.003 \, \Omega$ e lavori ad una frequenza centrale pari a 1 MHz. Si calcolino:

- l'efficienza di radiazione e la potenza massima in ricezione ai morsetti di uscita dell'antenna, supponendo che in direzione normale incida un campo magnetico piano e uniforme di fasore pari a $10^{-3} \, \text{A/m}$.
- la funzione angolare di guadagno e il valore teorico della reattanza di ingresso nel caso di monopolo sottile.

Soluzione: a), b).

B.6.2.5 Esercizi su antenne ad apertura

ESERCIZIO A.1: ANTENNA AD APERTURA RETTANGOLARE

Sia data un'antenna ad apertura rettangolare, di dimensione $a/\lambda=3$ lungo x e $b/\lambda=2$ lungo y, illuminata uniformemente in ampiezza e fase costante con polarizzazione lineare lungo y. Nell'ipotesi di fattorizzabilità dell'illuminazione, si deduca in modo sintetico, ma esaustivo:

- la funzione di radiazione e la larghezza nullo-nullo del lobo principale sul piano E e H e il relativo diagramma polare sul cerchio di visibilità;
- l'area equivalente massima, la direttività massima e l'efficienza di apertura nel caso di illuminazione di ampiezza sia uniforme che triangolare lungo x.

Soluzione a), b).

ESERCIZIO A.2: ANTENNA A PARABOLOIDE

Si consideri un'antenna a paraboloide con fascio a pennello, la cui potenza di ingresso all'antenna è di 0.1 dBW, l'efficienza di radiazione $\eta_r=0.85$ (con le altre efficienze di antenna supposte unitarie) e il suo guadagno sia approssimabile analiticamente mediante la seguente espressione:

$$G(\theta, \varphi) = G_M e^{-2(\theta/\theta_c)^2}$$

dove $G_M=40 \, \text{dBi}$. Nell'ipotesi di antenna molto direttiva (i.e., $\sin\theta \approx \theta$), calcolare:

- la larghezza del fascio a metà potenza o a $-3 \, \text{dB}$ se $\theta_c=2^\circ$, il valore dell'EIRP massimo e l'angolo solido di radiazione;
- il diametro del riflettore, se il prodotto tra angolo a metà potenza del lobo principale (in gradi) e lunghezza elettrica del diametro d'antenna è pari a 29 e la frequenza pari a 10 GHz.

Soluzione a), b).

ESERCIZIO A.3: ANTENNA CON FASCIO A PENNELLO

Si consideri un'antenna con fascio di radiazione e.m. di tipo gaussiano, la cui potenza sulla bocca di antenna è di 9.8 dBW e il cui angolo solido di radiazione di antenna sia pari a $9.55 \cdot 10^{-4} \, \text{sr}$. La sua efficienza di radiazione sia pari a 0.95 e la sua intensità di radiazione sia approssimabile mediante la seguente espressione con $\varphi \in (0, 2\pi)$ e $\theta \in (0, \pi/2)$:

$$U(\theta, \varphi) = U_M e^{-(\theta/2\theta_c)^2}$$

dove U_M e θ_c sono parametri. Nell'ipotesi di antenna molto direttiva (i.e., $\sin\theta \approx \theta$), calcolare:

- la funzione di guadagno dell'antenna, calcolando i parametri U_M e θ_c , e la larghezza del fascio a metà potenza o a -3 dB;
- l'area geometrica dell'antenna se l'efficienza di apertura alla bocca di antenna è pari a 0.9 e la frequenza di lavoro pari a 10 GHz.

Soluzione a), b).

B.6.2.6 Esercizi su allineamenti di antenne

ESERCIZIO S.1: ALLINEAMENTO UNIFORME DIPOLARE

Si consideri un monopolo cilindrico non caricato su piano conduttore perfetto, alimentato alla base e immerso in un mezzo con costanti primarie $\mu_r=1$, $\epsilon_r=2$ e $\sigma=0$ S/m. Il monopolo cilindrico abbia una lunghezza di 1 m, una sezione circolare di raggio di 1 cm, una resistività superficiale di 0.003Ω e lavori ad una frequenza centrale pari a 1 MHz nel vuoto. Si calcolino:

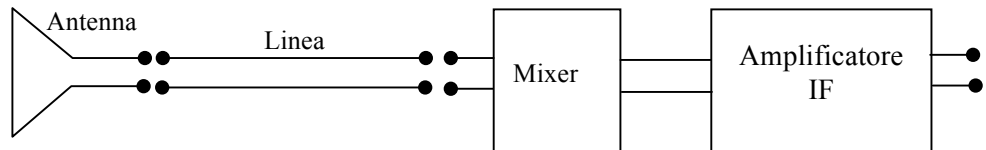
- l'efficienza di radiazione e la potenza massima in ricezione, supponendo che in direzione normale incida un campo magnetico di fasore pari a 1 A/m.
- la funzione angolare di direttività e il suo massimo nel caso di singolo monopolo e, a parità di alimentazione, nel caso di un doppietto di monopoli posti a una distanza pari a $\lambda/4$, alimentati con la stessa ampiezza e sfasati di 90° .

Soluzione a), b).

B.6.2.7 Esercizi interdisciplinari su sistemi di comunicazione

Esercizio I.1: RAPPORTO SEGNALE-RUMORE IN UN SISTEMA A MICROONDE

Si consideri un collegamento a microonde operante alla frequenza $f=6$ GHz tra due antenne a distanza $R=30$ km. Il sistema ricevente in figura ha le seguenti caratteristiche:



Antenna:	Guadagno antenna:	$G_R=40$ dB
	Temperatura di rumore d'antenna:	$T_A=100$ K
Linea di trasmissione:	Attenuazione totale della linea:	$L=10$ dB
Ricevitore:	Mixer:	Attenuazione: $L_M=6$ dB
	Figura di rumore:	$F_M=10$ dB
	Amplificatore IF	Figura di rumore: $F_{IF}=4$ dB
	Larghezza di banda:	$B=10$ MHz

Se l'antenna trasmittente ha un guadagno (massimo) $G_T=40$ dB, determinare:

- le perdite di spazio libero L_{FS} ;
- la potenza di rumore W_N alla sezione di uscita della linea;

- la potenza da trasmettere W_T per avere un rapporto S/N all'uscita dell'amplificatore IF pari a 30 dB (assumendo i sistemi perfettamente adattati e allineati).

Soluzione: $L_{FS} = -137.55$ dB; $W_{Nlinea} = -134.27$ dB; $W_T = 3.62$ mW. *Nota: l'amplificazione A_{IF} si elide nel bilancio.*

Esercizio I.2: BILANCIO DI COLLEGAMENTO DI UN SISTEMA DIGITALE

Si consideri un sistema di comunicazioni digitale nella tratta in discesa (down-link) in banda Ku, ovvero a 12 GHz, nel vuoto con un margine di operatività assegnato di 6 dB. I dati del collegamento sono i seguenti:

- EIRP pari a 4B.5 dBW;
- Temperatura equivalente di rumore di sistema pari a 107.5 K;
- Antenna ricevente con guadagno pari a 45 dBi;
- Distanza del collegamento pari a 40000 km.

Si calcoli il:

- rapporto G/T del ricevitore;
- rapporto C/N del collegamento;

Inoltre, sapendo che:

- il rapporto di densità spettrale di energia-per-bit E_b su rumore, ovvero E_b/N , desiderato è pari a 12.5 dB;
- il sistema di modulazione è binario coerente in fase di tipo 8-PSK;

si calcoli il:

- tasso di trasmissione dati R in bit/s;
- la probabilità di errore di simbolo P_e .

Soluzione: a) $G/T = 24.7$ dB/K; $C/N = 93.8$ dB-Hz; b) $R = 33.9$ Mbit/s; $P_e = 0.6 \cdot 10^{-3}$.

B.6.3 Simulatore numerico per analisi di antenne

Nel seguito si riporta una breve guida all'utilizzo di un ambiente di calcolo numerico per l'analisi di antenne lineari mediante il metodo dei momenti (MiniNEC). Il programma **MiniNEC** implementa la soluzione numerica del Metodo dei Momenti per l'analisi dell'impedenza di ingresso e del diagramma di radiazione di antenne lineari.

Osservazione: installazione e sull'utilizzo del programma MiniNEC

Gli studi di seguito descritti sono stati effettuati con **Expert MiniNEC Classic** (programma prodotto di EM Scientific Inc.) sul sistema operativo Windows o Linux. Il programma è scaricabile gratuitamente dal sito <http://www.emsci.com>, File di dimensioni: 7-8 Mb compresso. Piccoli accorgimenti sono da utilizzare affinché il programma funzioni in maniera corretta:

- durante l'installazione selezionare una cartella il cui percorso sia privo di spazi;

- prima dell'avvio del programma modificare le *'impostazioni internazionali'* affinché si abbia una notazione numerica inglese (ad esempio *English USA*) e mantenerla durante tutto l'utilizzo.

B.6.3.1 Analisi di dipoli mediante MiniNEC

Scopo di questa sezione è quello di fornire una guida introduttiva sull'utilizzo del programma Expert MiniNEC Classic, che affronteremo descrivendo un'antenna a dipolo di lunghezza $\lambda/2$. Successivamente confronteremo i risultati ottenuti con altre antenne:

- tre dipoli di lunghezze differenti (esattamente a λ , a $4/3 \lambda$ e a $3/2 \lambda$);
- due monopoli (esattamente la metà della struttura iniziale) di cui il secondo avente in aggiunta, rispetto al primo, un piano di massa (verificando così gli effetti descritti dal "Teorema delle immagini").

La descrizione del dipolo a semionda sarà quindi più dettagliata, proprio per poter eseguire passo-passo le nostre simulazioni. Le successive saranno illustrate in modo più sintetico, evidenziando solo i risultati ottenuti.

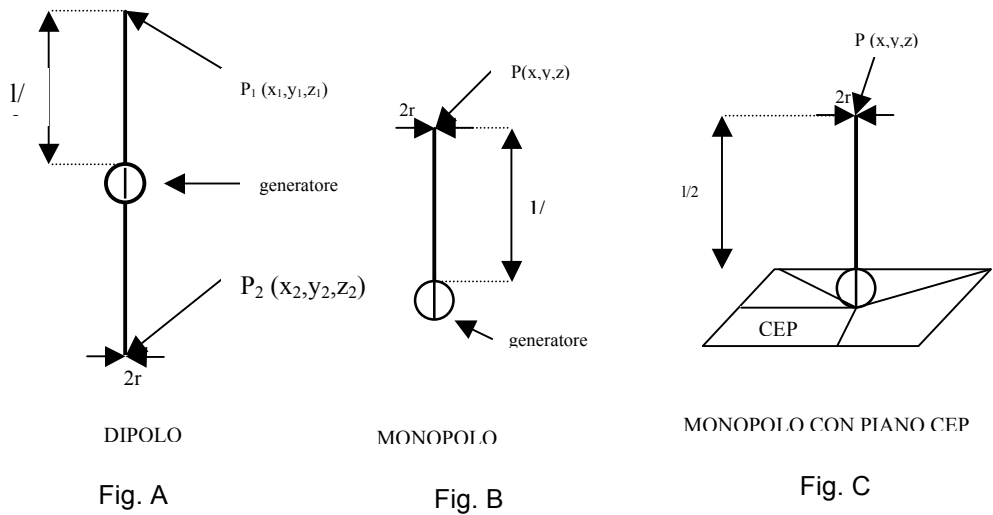


FIGURA B.6.1. Geometrie dei dipoli analizzati mediante MiniNEC.

Consideriamo, come esempio, un **dipolo a semionda non caricato**. Iniziamo la nostra illustrazione, visualizzando la struttura dell'antenna che andremo poi a studiare numericamente mediante MiniNEC. Per arrivare alle dimensioni geometriche dell'antenna, consideriamo una frequenza di lavoro pari a 100 MHz da cui si ricava la lunghezza d'onda (λ) nel vuoto è:

$$\lambda = \frac{c}{f} \cong \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m}}{1 \cdot 10^8 \text{ Hz}} = 3 \text{ m}$$

e quindi una lunghezza fisica l dell'antenna pari a (nell'ipotesi di dipolo infinitamente sottile ideale):

$$l = \frac{1}{2} \lambda = 1.5 \text{ m.}$$

Si noti che il dipolo reale “risonante” di spessore finito avrà una lunghezza pari circa a $l = 0.48 \lambda$, ovvero, fissata la lunghezza di 1.5 m, una frequenza pari circa a $f = c/(1.5/0.48) = 96 \text{ MHz}$. Nella figura B.6.2 si illustra tale **antenna a dipolo** di lunghezza $l=1.5 \text{ m}$ e frequenza di lavoro “risonante” pari a 96 MHz, avente spessore di $d=2 \text{ mm}$ e alimentato al centro con tensione di 1 V, nello spazio libero vuoto di coordinate (x,y,z) .

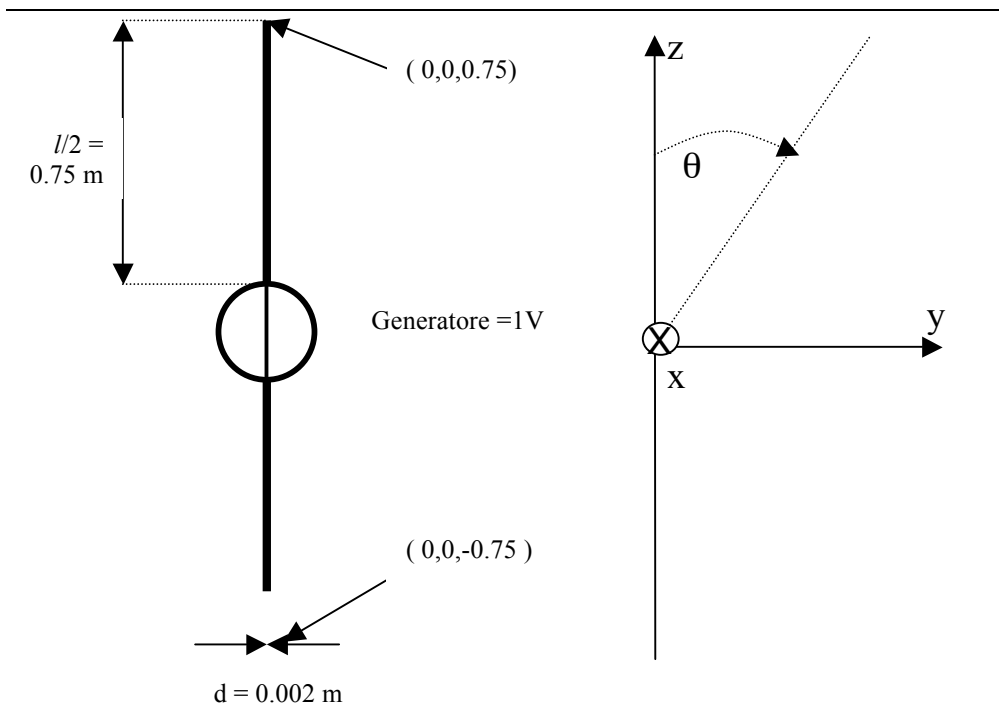


FIGURA B.6.2. Ipotesi per dipolo a semionda.

Passo 1. Impostazione della geometria del problema.

Dal menù selezionare: *Problem definition* → *Geometry* → *Geometry points*

Si aprirà la finestra, come in Fig. B.6.3, che permette di impostare l'unità di misura, l'*Environments* e le coordinate dei punti (o nodi) dell'antenna:

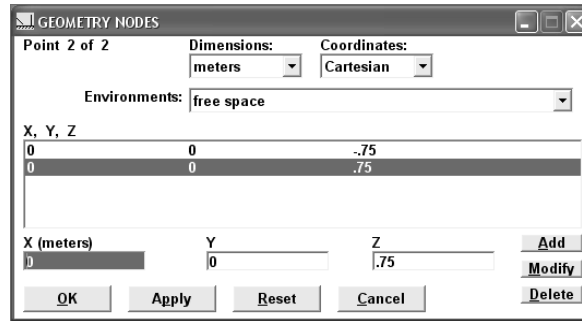


FIGURA B.6.3. Passo 1.

Nel nostro caso abbiamo impostato: *meters* e *free space* e le coordinate come da figura B.6.3.

Passo 2. Configurazione dei fili che compongono l'antenna.

Dal menù selezionare: *Problem definition* → *Geometry* → *Straight wires*

Si aprirà la finestra di Fig.3 che permette di impostare il raggio e il numero di segmenti per ogni filo che connette i punti #1 e #2:

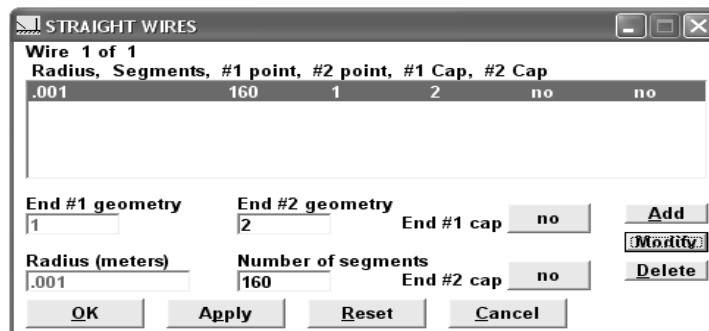


FIGURA B.6.3. Passo 2.

Con il **numero** di segmenti si stabilisce in quanti tratti il filo a cui si sta facendo riferimento viene suddiviso. Il programma calcolerà la grandezza d'interesse (ad esempio la distribuzione di corrente) per ogni segmento ottenendo poi una rappresentazione complessiva. Nel nostro esempio abbiamo impostato il **raggio** del dipolo pari a 0.001 m e il numero di segmenti pari a 160 (aumentando il numero di segmenti, si aumenta il tempo di calcolo della grandezza d'interesse). Si noti che i segmenti devono, in genere, avere una lunghezza non inferiore tipicamente a $\lambda/10$.

Passo 3. Definizione delle frequenze di lavoro.

Dal menù: *Problem definition* → *Electrical* → *Frequency*

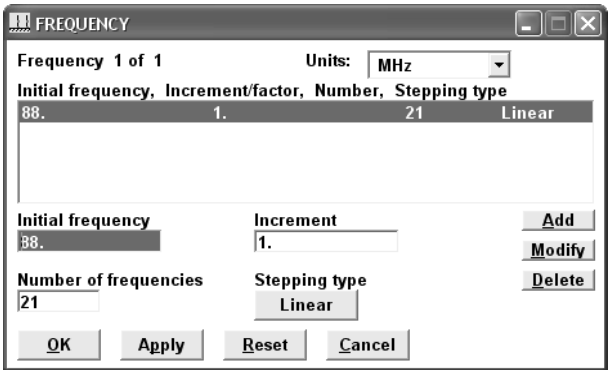


FIGURA B.6.4. Passo 3.

La banda nella quale si vuole valutare le prestazioni dell'antenna va da 88 a 108 MHz, con un passo di 1 MHz (ottenendo così 21 frequenze), come illustrato in Fig. B.6.4.

Passo 4. Nodo di alimentazione e lista dei nodi.

Dal menù: *Problem definition* → *Electrical* → *Voltage/current sources*

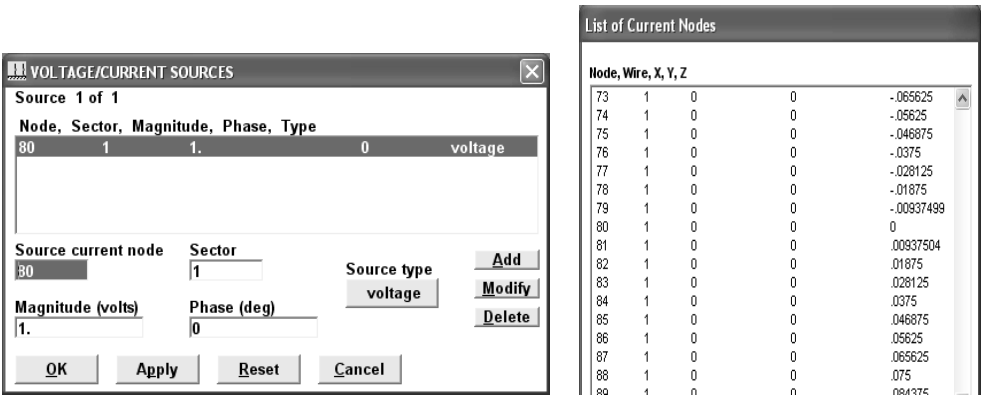


FIGURA B.6.4. Passo 4.

Dopo tale operazione viene visualizzata la lista dei valori dei nodi ottenuti dalla suddivisione in segmenti, come in figura B.6.4. Da questa lista è possibile individuare il nodo a cui collegare la sorgente. Nel nostro caso abbiamo posto un generatore da 1 Volt al nodo 80 (che è appunto nell'origine e quindi a metà della nostra antenna in Fig. B.6.1).

Passo 5. Calcolo dell'andamento della corrente.

Dal menù: *Run* → *Run options...*

Selezionare *Currents* quindi *OK*, come in figura B.6.5.

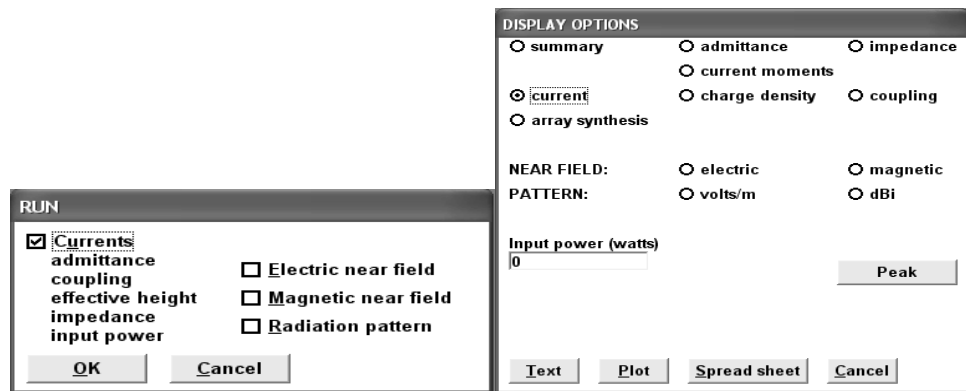


FIGURA B.6.5. Passo 5.

Il programma MiiNEC svolge i suoi calcoli e poi presenta la finestra in figura B.6.5 a destra. Selezionare quindi *current* e successivamente *Plot*. Si ottiene un'ulteriore finestra che permette di scegliere la modalità di visualizzazione:

Passo 6. Visualizzazione dell'andamento della corrente.

Selezioniamo *z-axis* e la frequenza di lavoro dell'antenna. Possiamo ottenere il grafico della distribuzione di corrente per ogni frequenza del nostro intervallo. Riportiamo di seguito, in figura B.6.7 il grafico per i valori limite della banda e per un valore "centrale", cioè a 88, 100 e 108 MHz.

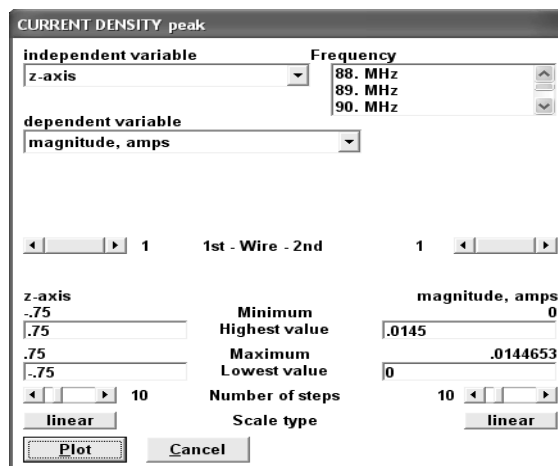


FIGURA B.6.6. Passo 6.

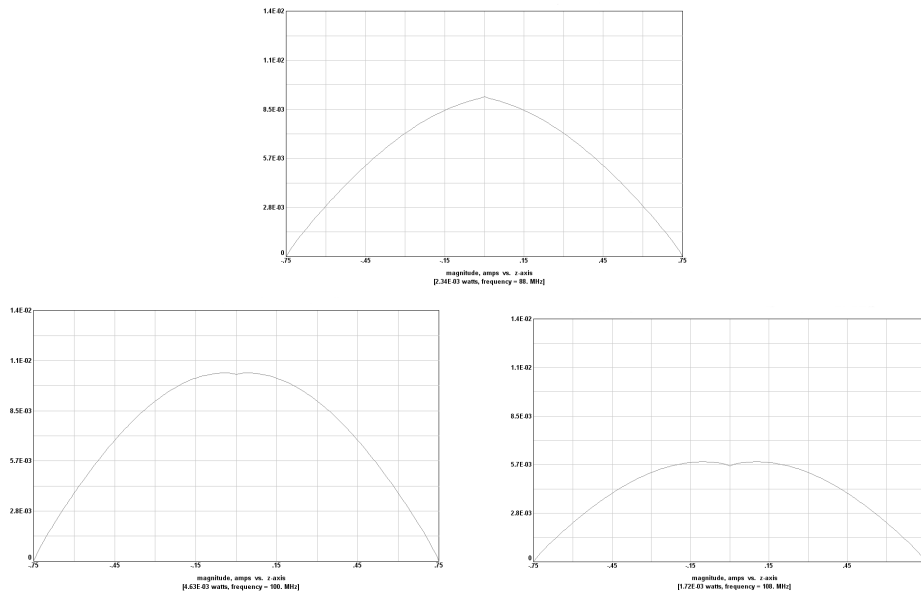


FIGURA B.6.7. Distribuzione della corrente (modulo) a 88 MHz, 100 MHz E 108 MHz.

Passo 7. Diagramma di radiazione e definizione degli intervalli angolari

Dal menù: *Problem definition* → *Solution* → *Radiation pattern*

Inserire i valori mostrati in figura B.6.8 che, nel nostro esempio, fanno variare $\theta \in [0, \pi]$ con incrementi di 5° e $\varphi \in [0, 2\pi]$ con incrementi di 10° .

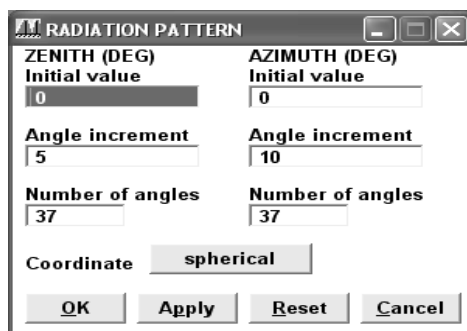


FIGURA B.6.8. Passo 7.

Passo 8. Calcolare dell'intensità di radiazione

Dal menù: *Run* → *Run options....* Selezionare *Radiation pattern* e premere OK.

Si ottiene così l'interfaccia di figura B.6.9 in alto.

Selezionando l'opzione *volts/m* e premendo il tasto *Plot*. Nella schermata mostrata in Fig. 16 selezionare *polar plot* e quindi la frequenza e gli angoli desiderati per visualizzare l'intensità di radiazione.

RUN

☐ Currents
admittance
coupling
effective height
impedance
input power

☐ Electric near field
☐ Magnetic near field
☒ Radiation pattern

OK

Cancel

DISPLAY OPTIONS

☐ summary
☐ current
☐ array synthesis

☐ admittance
☐ current moments
☐ charge density

☐ impedance
☐ coupling

NEAR FIELD:
PATTERN:

☐ electric
☒ volts/m

☐ magnetic
☐ dBi

Input power (watts)
0

Peak

Radial distance (meters)
0

volts/m

Text

Plot

Spread sheet

Cancel

RADIATION PATTERN peak

independent variable
zenith, deg

Frequency
88. MHz
89. MHz
90. MHz

dependent variable
E-theta magnitude, v/m

azimuth = 0 deg

☒ x-y plot
☐ polar plot

zenith, deg
0
180.
180.
0

Minimum
Highest value
Maximum
Lowest value

E-theta magnitude, v/m
0
.832
.831524
0

Number of steps
10

Scale type
linear

Plot

Cancel

FIGURA B.6.9. Passo 8.

Dalla simulazione si ottengono i seguenti grafici come in figura B.6.10:

- Piano principale $\varphi=0^\circ$, ovvero il piano x-z;
- Piano principale $\theta=90^\circ$, ovvero il piano x-y.

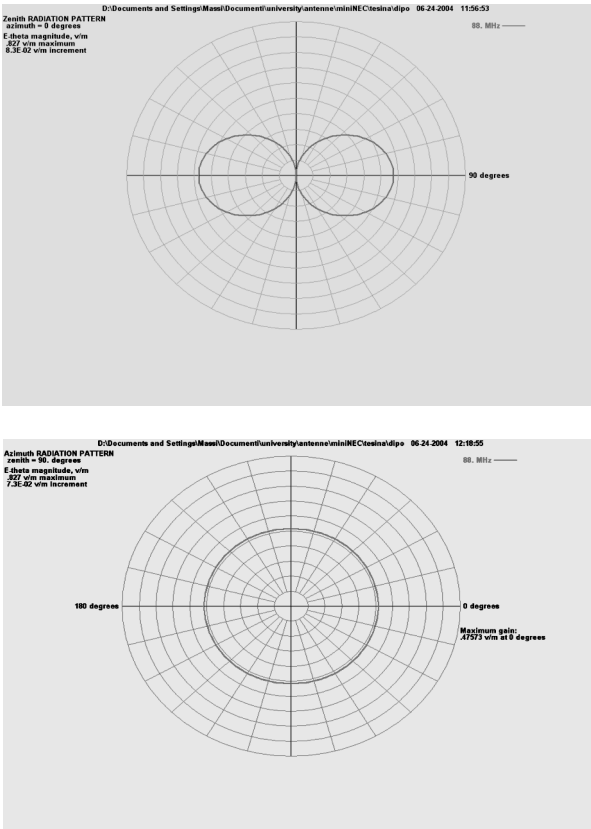


FIGURA B.6.10. Diagrammi di radiazione del dipolo per $\varphi=0$ e per $q=p/2$ a 88 MHz.

Passo 9. Calcolo e visualizzazione della resistenza e reattanza d'antenna:

Dal menù: *Output display* → *Display option...*

Dalla figura B.6.11, selezionare *impedance* e premere *plot*.

DISPLAY OPTIONS		IMPEDANCE	
<input type="radio"/> summary	<input type="radio"/> admittance	<input checked="" type="radio"/> impedance	
<input type="radio"/> current	<input type="radio"/> current moments		
<input type="radio"/> array synthesis	<input type="radio"/> charge density	<input type="radio"/> coupling	
NEAR FIELD:		<input type="radio"/> electric	<input type="radio"/> magnetic
PATTERN:		<input type="radio"/> volts/m	<input type="radio"/> dBi
Tx line impedance	Tx line length (meters)		
50.	0		
Normalization			
50.			
Text Plot Spread sheet Cancel			
		IMPEDANCE	
		independent variable	Source node
		frequency, MHz	80 of sector 1
		dependent variable	
		resistance, ohms	
		frequency, MHz	resistance, ohms
		88.	Minimum 56.385
		108.	Highest value 122.
		108.	Maximum 121.714
		88.	Lowest value 56.3
		Number of steps	10
		Scale type	linear
		Plot Cancel	

FIGURA B.6.11. Passo 9.

Dal menù *dependent variable* è possibile selezionare sia *resistance* che *reactance* per visualizzare i relativi grafici:

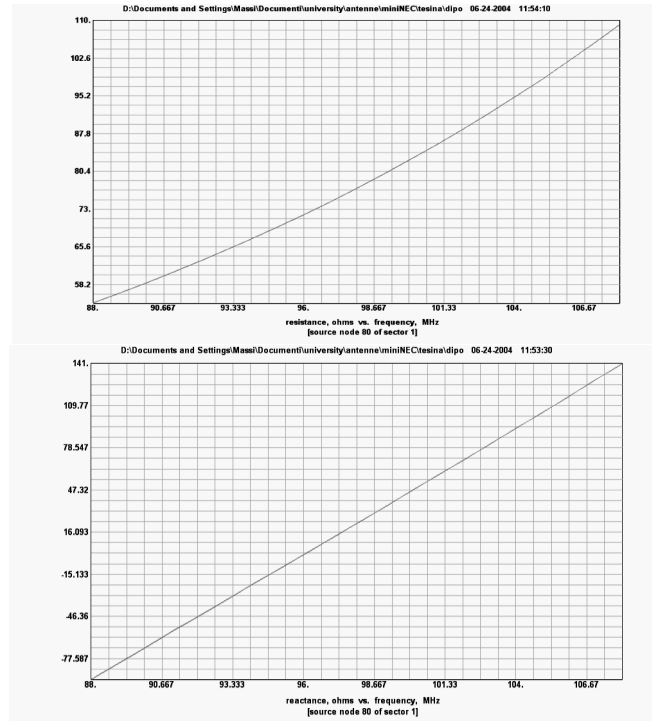


FIGURA B.6.12. Grafici di resistenza e reattanza rispetto alla frequenza.

Si noti come la reattanza si annulla, come atteso, per $f=96$ GHz (ovvero per 0.48λ per i dipoli di spessore finito), mentre la resistenza di ingresso è pari circa a 72Ω . Con lo stesso procedimento illustrato per il dipolo a $\lambda/2$, analizzeremo i dipoli non caricati a λ , $4/3 \lambda$ e a $3/2 \lambda$.

B.6.3.1 Esempi di analisi mediante MiniNEC

Dipolo a onda intera non caricato di lunghezza $l = \lambda$

Avendo una frequenza di lavoro di 100 MHz $\Rightarrow \lambda=3$ m (spazio libero) $\Rightarrow l=3$ m, scegliamo:

- $P_1 (0,0,1.5)$
- $P_2 (0,0,-1.5)$
- Raggio $r=0.001$ m
- Generatore= 1 V

ripetendo i Passi 1-9 descritti, otteniamo $|I(z)|$ a 100 MHz, il diagramma di radiazione sui piani principali $\varphi=0$ e $\theta=\pi/2$ e la resistenza (R_a) e la reattanza (X_a) d'antenna nella banda d'interesse, riportati in figura B.6.13.

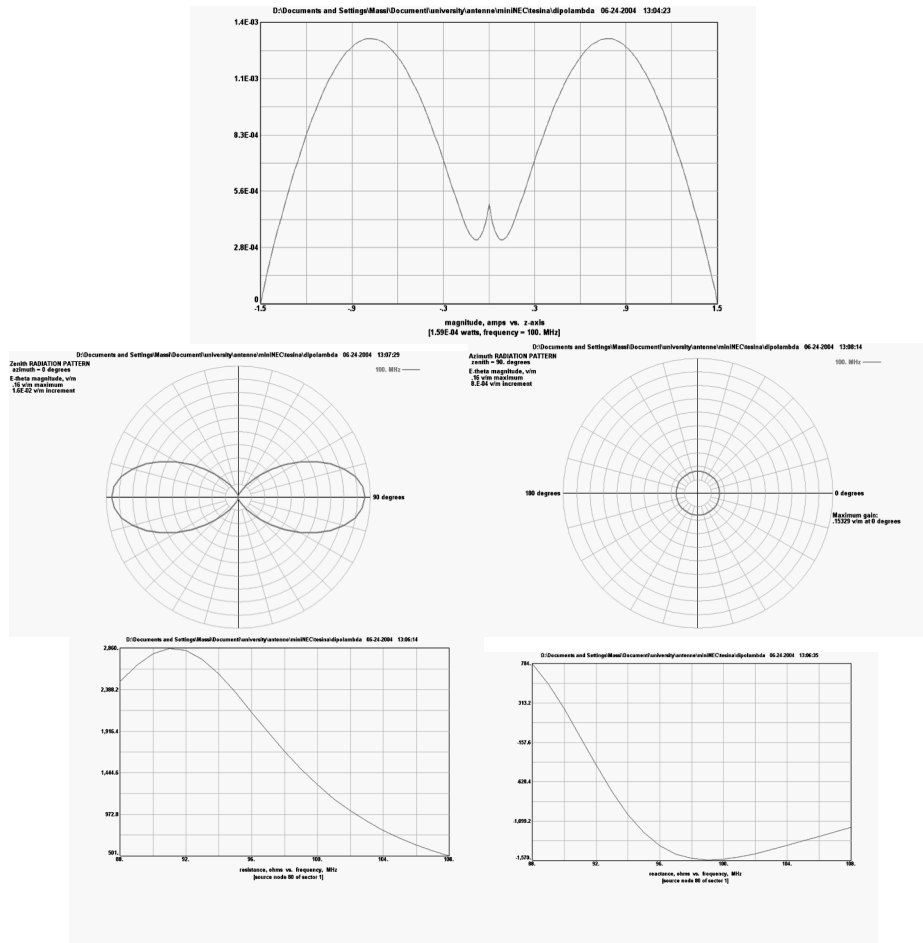


FIGURA B.6.13. Grafici per dipolo non caricato di lunghezza $l=\lambda$.

Essendo un dipolo $l=\lambda$, idealmente la frequenza di risonanza dovrebbe essere uguale a 100 MHz. In realtà, come si può notare dal grafico della X_a , essa si annulla per una frequenza pari circa a 91MHz.

Dipolo non caricato di lunghezza $l = 4/3 \lambda$

Avendo una frequenza di lavoro di 100 MHz $\Rightarrow \lambda=3$ m (spazio libero) $\Rightarrow l=4$ m, scegliamo:

- $P_1 (0,0,2)$
- $P_2 (0,0,-2)$
- Raggio $r= 0.001$ m
- Generatore= 1V

ripetendo i Passi 1-9 descritti, otteniamo $|I(z)|$ a 100 MHz, il diagramma di radiazione sui piani principali $\varphi=0$ e $\theta=\pi/2$ e la resistenza (R_a) e la reattanza (X_a) d'antenna nella banda d'interesse, riportati in figura B.6.14.

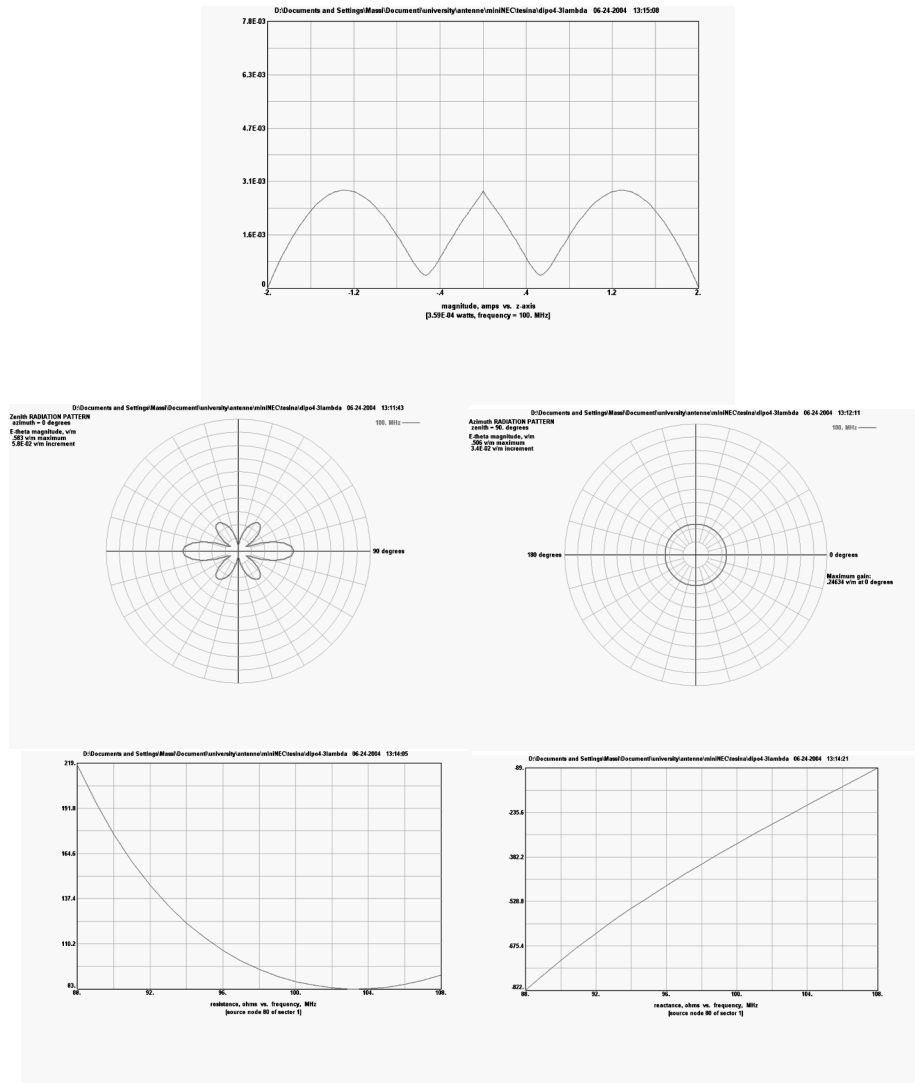


FIGURA B.6.14. Grafici per dipolo non caricato di lunghezza $l=4/3 \lambda$.

Dipolo non caricato di lunghezza $l=3/2 \lambda$

Avendo una frequenza di lavoro di 100 MHz $\Rightarrow \lambda=3$ m (spazio libero) $\Rightarrow l=4.5$ m, scegliamo:

- $P_1 (0,0,2.25)$
- $P_2 (0,0,-2.25)$
- Raggio $r= 0.001$ m
- Generatore= 1 V

ripetendo i Passi 1-9 descritti, otteniamo $|I(z)|$ a 100 MHz, il diagramma di radiazione sui piani principali $\varphi=0$ e $\theta=\pi/2$ e la resistenza (R_a) e la reattanza (X_a) d'antenna nella banda d'interesse, riportati in figura B.6.15.

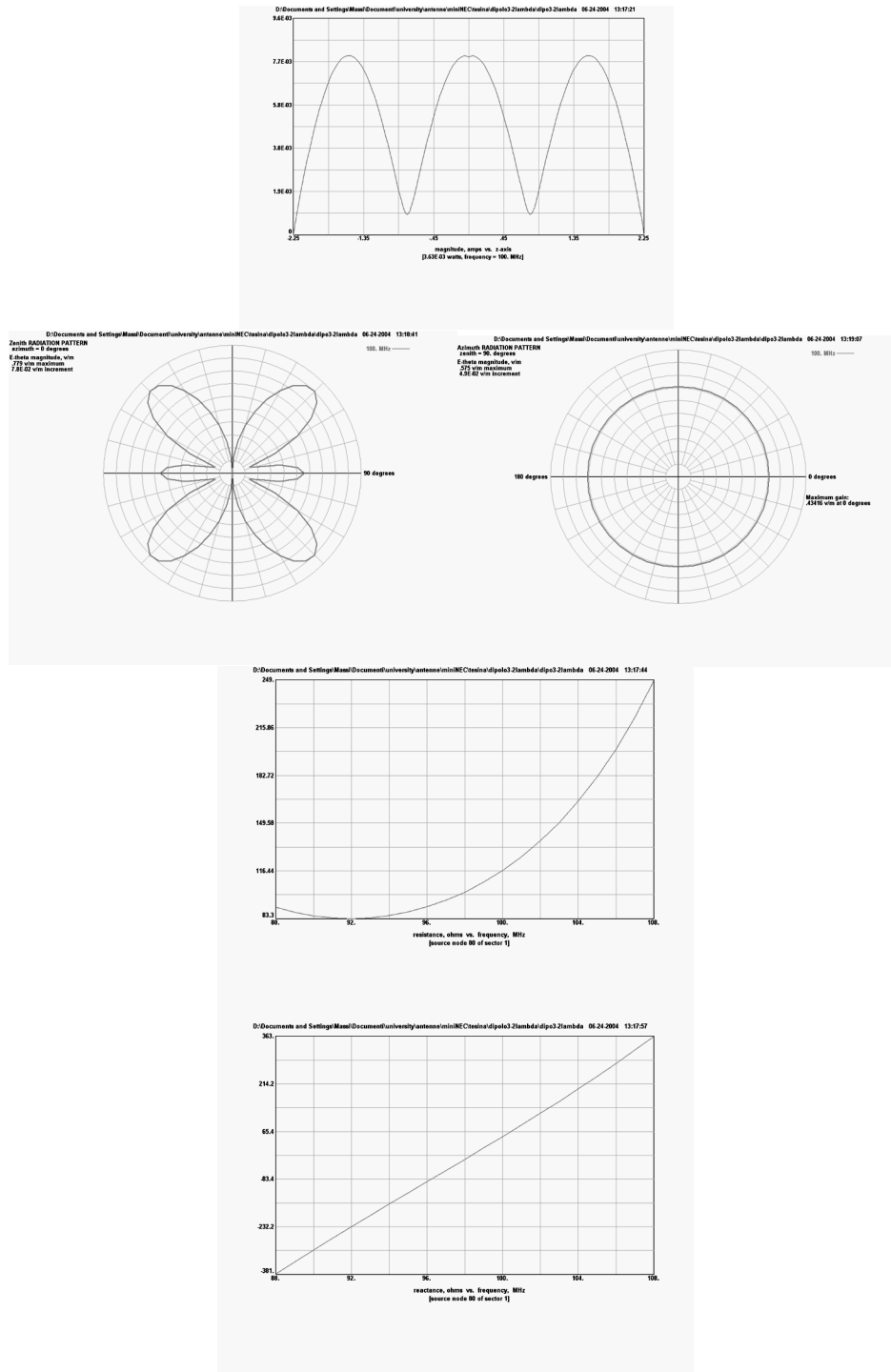


FIGURA B.6.15. Grafici per dipolo non caricato di lunghezza $l=3/2 \lambda$.

È possibile notare quello che viene chiamato diagramma a “farfalla”. Dai diagrammi di radiazione dei dipoli da noi analizzati si può notare che, all’aumentare della lunghezza l aumenta la direttività dell’ antenna e per $l > \lambda$ si denota un aumento dei lobi secondari rispetto a quelli primari.

Monopolo con piano conduttore elettrico perfetto (CEP) a semionda $l = \lambda/2$

A questo punto è interessante simulare il comportamento del monopolo in presenza di un piano CEP (come in figura C) ed osservarne l’ analogia con il caso di monopolo a $l = \lambda/2$ in spazio libero e dipolo a $l = \lambda/2$ tramite il teorema delle immagini.

Avendo una frequenza di lavoro di 100 MHz $\Rightarrow \lambda = 3$ m (spazio libero) $\Rightarrow l = 1.5$ m, \rightarrow scegliamo:

- $P_1 (0,0,0.75)$
- $P_2 (0,0,0)$
- Raggio $r = 0.001$ m
- Generatore = 1 V
- inserimento del piano CEP (*Perfect ground* nel menù MiniNec)

ripetendo i Passi 1-9 descritti, otteniamo $|I(z)|$ a 100 MHz, il diagramma di radiazione sui piani principali $\varphi = 0$ e $\theta = \pi/2$ e la resistenza (R_a) e la reattanza (X_a) d’ antenna nella banda d’ interesse, riportati in figura B.6.16.

Si può notare la mancanza del picco nella distribuzione di corrente rispetto al caso del monopolo in spazio libero (senza piano CEP, ma non mostrato). I diagrammi di radiazione del monopolo sui piani principali $\varphi = 0$ e $\theta = \pi/2$ sono non nulli solo nel semispazio superiore e hanno un comportamento simile a quello di un dipolo a semionda in spazio libero, come previsto dal teorema delle immagini. Come atteso, la resistenza di ingresso per $f = 96$ MHz è circa la metà di quella del dipolo a semionda in spazio libero.

B.6.4 Formulari riassuntivi

Nel seguito si riporta una lista non esaustiva delle principali formule e risultati, ricavati nel testo e qui riportati seguendo la successione dei vari capitoli.

B.6.4.1 Principali parametri di Antenna a grande distanza

$$\underline{P}_{\infty}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{2} \underline{E}_{\infty}(r, \theta, \varphi) \times \underline{H}_{\infty}^*(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{2\eta} |\underline{E}_{\infty}(r, \theta, \varphi)|^2 \underline{r}_o \quad \text{Vettore di Poynting } [W/m^2]$$

$$W_T = \oint_S \underline{P}_{\infty}(r, \theta, \varphi) \cdot \underline{n}_o dS = \int_{4\pi} U(\theta, \varphi) d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} U(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \quad \text{Potenza trasmessa o irradiata } [W]$$

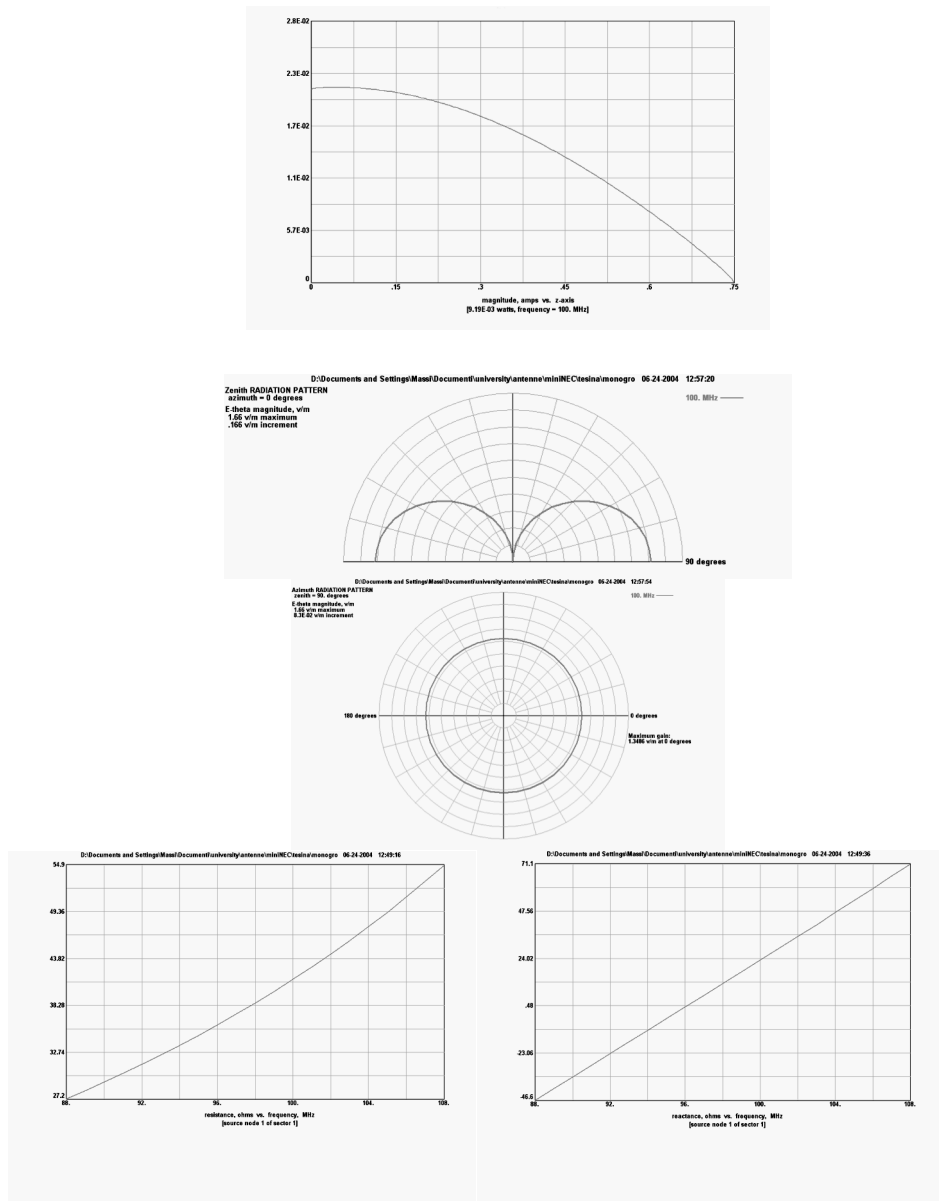


FIGURA B.6.16. Grafici per monopolo di lunghezza $l=0.5 \lambda$ su piano CEP.

Distanza di campo lontano con condizione a $\pi/8$: $r > 2 (D^2/\lambda)$

Regione di campo lontano [m]

$$D(\theta, \varphi) = \frac{P_{\infty}(r, \theta, \varphi)}{P_{\infty, iso}} = \frac{P_{\infty}(r, \theta, \varphi)}{W_T / 4\pi r^2} = 4\pi \frac{U(\theta, \varphi)}{W_T}$$

Direttività [1/sr]

$$\Omega_A = \int_{4\pi} U_n(\theta, \varphi) d\Omega$$

Angolo solido di radiazione [sr]

$$D_M = \frac{4\pi}{\Omega_A} \cong \frac{4\pi}{\Theta_{1rad} \Theta_{2rad}} = \frac{41253}{\Theta_{1deg} \Theta_{2deg}}$$

Direttività massima [adim]

$$\eta_i = \eta_m \cdot \eta_r \cdot \eta_p$$

Efficienza totale di antenna [adim]

$$\eta_m = 1 - |\Gamma_V|^2 = 1 - \left| \frac{VSWR-1}{VSWR+1} \right|^2$$

Efficienza di disadattamento [adim]

$$\eta_r = \frac{W_r}{W_r + W_l} = \frac{R_r}{R_r + R_l}$$

Efficienza di radiazione [adim]

$$\eta_p = \frac{|\underline{h} \cdot \underline{E}_i|^2}{|\underline{h}|^2 |\underline{E}_i|^2} = |\underline{h}_0 \cdot \underline{e}_{0i}|^2 = |\cos(\Omega_i)|^2$$

Efficienza di polarizzazione [adim]

$$G(\theta, \varphi) = \frac{P_\infty(r, \theta, \varphi)}{W_g / 4\pi r^2} = \frac{U(\theta, \varphi)}{(W_T + W_l) / 4\pi} = \eta_r D(\theta, \varphi)$$

Guadagno [1/sr]

$$R_r = 2 \frac{W_T \cdot \iint_{4\pi} P_\infty(r, \theta, \varphi) r^2 d\Omega}{|I_g|^2}$$

Resistenza di radiazione [Ω]

$$b(\theta, \varphi) = \frac{V_a(\theta, \varphi)}{|\underline{E}_i|}$$

Lunghezza (o Altezza) equiv. [m]

$$A_e(\theta, \varphi) = \frac{W_R(\theta, \varphi)}{P_i}; \quad \eta_a = A_{eM} / A; \quad A_e(\theta, \varphi) = |b(\theta, \varphi)|^2 \frac{\eta}{4R_r}$$

Area equivalente [m²]

$$W_R = A_{eM} P_i = W_T D_{MT} D_{MR} \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2$$

Potenza ricevuta Formula Friis [W]

$$EIRP = W_T G_T(\theta_t, \varphi_t) = W_T [\eta_r D_{MT} U_{nT}(\theta_t, \varphi_t)]$$

Potenza irrad. isotropica efficace [W]

$$W_R = EIRP G_{MR} L_{FS} L_{PA}; \quad L_{PA} = e^{-\alpha_p R}$$

Formula di Friis [W] e attenuazione

$$W_R = W_T \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3} \frac{D_M^2}{R^4} \sigma_b$$

Potenza ricevuta da radar [W]

$$T_A = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi T_B(\theta, \varphi) D(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi$$

Temp. di rumore di antenna [K]

$$T_A' = \eta_r T_A + T_o(1 - \eta_r)$$

Temp. rumore antenna in uscita [K]

$$T_A'' = T_A' e^{-2\alpha_l l} + T_o(1 - e^{-2\alpha_l l})$$

Temp. rumore antenna in guida [K]

$$W_{N_{sys}} = k(T_A'' + T_{REC}) \Delta f = kT_{sys} \Delta f$$

Potenza totale di rumore [W]

$$\frac{S}{N} = \frac{W_R}{W_{N_{sys}}} = \frac{EIRP G_{Mr} L_{FS} L_{PA}}{kT_{sys} \Delta f}$$

Rapporto segnale rumore [adim]

$$G/T = \frac{G_{Mr}}{T_{sys}}$$

Rapporto G/T in ricezione [1/K]

B.6.4.2 Principali formule di Radiazione e.m.

Equazioni di Maxwell e relazioni costitutive

$$\underline{\mathcal{E}}(\underline{r}, t) = \text{Re} \{ \underline{E}(\underline{r}) e^{+j\omega_s t} \} = \text{Re} \{ [\underline{E}_R(\underline{r}) + j\underline{E}_I(\underline{r})] e^{+j\omega_s t} \}$$

Vettore complesso

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = -j\omega\mu\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}}) - \underline{\mathbf{J}}_{mi}(\underline{\mathbf{r}}) \\ \nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}}) = j\omega\varepsilon_c\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) + \underline{\mathbf{J}}_i(\underline{\mathbf{r}}) \\ \nabla \cdot \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}) = -j\omega\rho_i(\underline{\mathbf{r}}) \\ \nabla \cdot \underline{\mathbf{J}}_{-m}(\underline{\mathbf{r}}) = -j\omega\rho_{mi}(\underline{\mathbf{r}}) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \underline{\mathbf{D}}(\underline{\mathbf{r}}) = \varepsilon(\omega)\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = \varepsilon_0\varepsilon_r(\omega)\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = \varepsilon_0[\varepsilon_r'(\omega) - j\varepsilon_r''(\omega)]\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) \\ \underline{\mathbf{B}}(\underline{\mathbf{r}}) = \mu\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}}) = \mu_0\mu_r\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}}) \\ \underline{\mathbf{J}}_c(\underline{\mathbf{r}}) = \sigma\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) \end{cases}$$

$$k = \beta - j\alpha = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_c}, \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}}, \quad n = \sqrt{\varepsilon_{rc}} \quad \text{Costanti secondarie}$$

Condizioni al contorno

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{n}}_o \times (\underline{\mathbf{H}}_2 - \underline{\mathbf{H}}_1) &= \underline{\mathbf{K}} & \underline{\mathbf{n}}_o \times (\underline{\mathbf{E}}_2 - \underline{\mathbf{E}}_1) &= -\underline{\mathbf{K}}_m \\ \underline{\mathbf{n}}_o \cdot (\underline{\mathbf{D}}_2 - \underline{\mathbf{D}}_1) &= \rho_s & \underline{\mathbf{n}}_o \cdot (\underline{\mathbf{B}}_2 - \underline{\mathbf{B}}_1) &= \rho_{ms} \end{aligned}$$

$$\text{CEP:} \quad \begin{aligned} \underline{\mathbf{n}}_o \times \underline{\mathbf{H}}_2 &= \underline{\mathbf{J}}_s = \underline{\mathbf{K}} & \underline{\mathbf{n}}_o \times \underline{\mathbf{E}}_2 &= \underline{\mathbf{J}}_{ms} = -\underline{\mathbf{K}}_m \\ \underline{\mathbf{n}}_o \cdot \underline{\mathbf{D}}_2 &= \rho_s & \underline{\mathbf{n}}_o \cdot \underline{\mathbf{B}}_2 &= \rho_{ms} \end{aligned}$$

$$\text{BCE:} \quad \underline{\mathbf{n}}_o \times \underline{\mathbf{E}}_2 = Z_s \underline{\mathbf{H}}_2 \quad \text{con} \quad Z_s = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_{c1}}} \cong \sqrt{\frac{\mu}{-j\sigma_1/\omega}} = \sqrt{j\frac{\omega\mu_1}{\sigma_1}} = \frac{1+j}{\sigma_1} \sqrt{\frac{\omega\mu_1\sigma_1}{2}} = \frac{1+j}{\sigma_1\delta_s}$$

$$\oint_S \underline{\mathbf{P}} \cdot \underline{\mathbf{n}}_o d^2\underline{\mathbf{r}}' + 2j\omega \int_V (w_m - w_e) d^3\underline{\mathbf{r}}' + \int_V p_c d^3\underline{\mathbf{r}}' = \int_V (p_{ei} + p_{mi}) d^3\underline{\mathbf{r}}' \quad \text{Teo. di Poynting}$$

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{A}} + k^2 \underline{\mathbf{A}} = -\underline{\mathbf{J}}_i, \quad \begin{cases} \underline{\mathbf{H}} = \nabla \times \underline{\mathbf{A}} \\ \underline{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\underline{\mathbf{A}} + \frac{\nabla\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}}}{j\omega\varepsilon_c} \end{cases} \quad \text{Pot. elettrodinamici}$$

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = \underline{\mathbf{E}}_0 e^{-jk_z z} = \underline{\mathbf{E}}_0 e^{-j\beta z} e^{-\alpha z}, \quad u_z = \frac{\omega}{\beta_z} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \quad \boxed{\frac{E_0}{H_0} = \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}}} \quad \text{Onde piane}$$

$$E(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{k_x, k_y}(k_x, k_y) e^{-jk_x x - jk_y y - jk_z z} dk_x dk_y \quad \text{Spettro onde piane}$$

Equazione di Helmholtz, soluzione e funzione di Green in spazio libero

$$\begin{cases} \nabla^2 \underline{\mathbf{E}} + k^2 \underline{\mathbf{E}} = j\omega\mu\underline{\mathbf{J}}_i + \nabla\left(\frac{\rho_i}{\varepsilon_c}\right) + \nabla \times \underline{\mathbf{J}}_{mi} \\ \nabla^2 \underline{\mathbf{H}} + k^2 \underline{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon_c \underline{\mathbf{J}}_{mi} + \nabla\left(\frac{\rho_{mi}}{\mu}\right) - \nabla \times \underline{\mathbf{J}}_i \end{cases}$$

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{r}}') G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') d^3\underline{\mathbf{r}}' = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{r}}) \otimes G(\underline{\mathbf{r}}) \quad \text{con} \quad G(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = \frac{1}{4\pi R} e^{-jkR}$$

Approssimazioni della funz. di Green e campo e.m. irradiato in zona lontana

$$G_\infty(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') \cong \frac{1}{4\pi r} e^{-jk(r - \underline{\mathbf{r}}_0 \cdot \underline{\mathbf{r}}')}, \quad G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') \cong \frac{1}{4\pi r} e^{-jk\left(r - \underline{\mathbf{r}}_0 \cdot \underline{\mathbf{r}}' + r'^2/2r\right)},$$

$$r \geq r_F = \frac{2D_a^2}{\lambda} \Rightarrow \nabla \cdot \underline{\mathbf{A}}_\infty \approx \frac{\partial A_{\infty r}}{\partial r} \approx -jkA_{\infty r}$$

$$E_{r\infty}(\underline{\mathbf{r}}) = 0$$

$$E_{\theta\infty}(\underline{\mathbf{r}}) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi r} e^{-jk r} \int_V J_{i\theta}(\underline{\mathbf{r}}') e^{jk \underline{\mathbf{r}}_p \cdot \underline{\mathbf{r}}'} d^3\underline{\mathbf{r}}' - \frac{jk}{4\pi r} e^{-jk r} \int_V J_{mi\varphi}(\underline{\mathbf{r}}') e^{jk \underline{\mathbf{r}}_p \cdot \underline{\mathbf{r}}'} d^3\underline{\mathbf{r}}'$$

$$E_{\varphi\infty}(\underline{\mathbf{r}}) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi r} e^{-jk r} \int_V J_{i\varphi}(\underline{\mathbf{r}}') e^{jk \underline{\mathbf{r}}_p \cdot \underline{\mathbf{r}}'} d^3\underline{\mathbf{r}}' + \frac{jk}{4\pi r} e^{-jk r} \int_V J_{m\theta}(\underline{\mathbf{r}}') e^{jk \underline{\mathbf{r}}_p \cdot \underline{\mathbf{r}}'} d^3\underline{\mathbf{r}}'$$

Modello di impedenza d'ingresso

$$\begin{cases} R_a = 2 \frac{W_T}{|I_g|^2} + 2 \frac{W_I}{|I_g|^2} = R_r + R_l \\ X_a = \frac{4\omega(\Xi_m - \Xi_e)}{|I_g|^2} \end{cases}, \quad W_T = \int_{S_e} \underline{\mathbf{P}} \cdot \underline{\mathbf{n}}_o d^2 \underline{\mathbf{r}}' = \frac{1}{2} \int_{S_e} (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^* \cdot \underline{\mathbf{n}}_o) d^2 \underline{\mathbf{r}}',$$

$$W_I = \int_V p_c d^3 \underline{\mathbf{r}}' = \frac{1}{2} \int_V \sigma |\underline{\mathbf{E}}|^2 d^3 \underline{\mathbf{r}}'$$

Teorema di reciprocità, equivalenza e ricezione

$$\oint_S (\underline{\mathbf{E}}_1 \times \underline{\mathbf{H}}_2 - \underline{\mathbf{E}}_2 \times \underline{\mathbf{H}}_1) \cdot \underline{\mathbf{n}}_o d^2 \underline{\mathbf{r}}' = I_{12} - I_{21}, \quad \begin{cases} \underline{K} = \underline{n}_0 \times \underline{H} \\ \underline{K}_m = -\underline{n}_0 \times \underline{H} \end{cases} \text{ su } S \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{E} = 0 \\ \underline{H} = 0 \end{cases} \text{ in } V_{\text{interno}}$$

$$W_R = \frac{1}{2\eta} |E_{0i}|^2 P_i = A_e P_i$$

B.6.4.3 Principali parametri di Antenne Lineari

Impedenza di ingresso di antenna ed espressioni di resistenza e reattanza d'antenna $[\Omega]$

$$Z_a(\omega) = R_a(\omega) + jX_a(\omega) = [R_r(\omega) + R_l(\omega)] + jX_a(\omega)$$

$$\begin{cases} R_a = 2 \frac{W_T}{|I_g|^2} + 2 \frac{W_I}{|I_g|^2} = R_r + R_l \\ X_a = \frac{4\omega(\Xi_m - \Xi_e)}{|I_g|^2} \end{cases}$$

Lunghezze equivalenti $[m]$ elettriche e magnetiche

$$\begin{cases} V_{aM} = b_M |\underline{\mathbf{E}}_i| \\ I_{aM} = b_{mM} |\underline{\mathbf{H}}_i| \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \frac{|\underline{\mathbf{E}}_i|}{|\underline{\mathbf{H}}_i|} = \eta \\ \frac{|\underline{\mathbf{H}}_i|}{|\underline{\mathbf{E}}_i|} = \eta \end{cases} \quad \& \quad Z_a = \frac{V_{aM}}{I_{aM}}$$

$$A_{eM} = b_M^2 \frac{\eta}{4R_r} \quad e \quad \frac{b_M}{b_{mM}} = \frac{Z_a}{\eta} \quad \Rightarrow \quad 4A_{eM} = b_M b_{mM}$$

Equazione integrale di Hallen e soluz. approx. dell'eq. di Hallen per dipoli cilindrici

$$\int_{-l/2}^{l/2} I(\underline{z}') \frac{e^{-jk\sqrt{a^2 + (\underline{z} - \underline{z}')^2}}}{4\pi\sqrt{a^2 + (\underline{z} - \underline{z}')^2}} d\underline{z}' = A^+ e^{-jk\underline{z}} + A^- e^{jk\underline{z}} \quad \text{per } \underline{z} \neq 0, |\underline{z}| \leq l$$

$$I(\underline{z}) = I^+ e^{-jk\underline{z}} + I^- e^{jk\underline{z}} \quad \text{per } |\underline{z}| \leq l/2$$

Distribuzione di corrente $[A]$ in dipoli non caricati

$$I(\underline{z}) = I_0 \frac{\sin[k(l/2 - |\underline{z}|)]}{\sin(kl/2)} \quad \text{per } |\underline{z}| \leq l/2$$

Resistenza di perdita per antenne a dipolo

$$R_l = 2 \frac{W_I}{|I_0|^2} = \frac{R_s}{2\pi a |I_0|^2} \int_{-l/2}^{l/2} |I(\underline{z})|^2 d\underline{z}$$

Lunghezza elettrica equivalente $[m]$ di dipoli non car.

$$b(\theta) = b_0(\theta) = \frac{\sin \theta}{I_0} N_{\underline{z}}(\theta) = \frac{\lambda}{\pi \sin(kl/2)} \left[\frac{\cos[(kl/2) \cos \theta] - \cos(kl/2)}{\sin \theta} \right]$$

Intensità di radiazione norm. $[W/sr]$ di dipoli n.c.

$$U_n(\theta) = U_{0n} \left[\frac{\cos[(kl/2) \cos \theta] - \cos(kl/2)}{\sin \theta} \right]^2$$

Dipolo elettrico elementare (hertziano)

$$U_n(\theta) = \sin^2 \theta \quad \text{con} \quad \begin{cases} b_M = l \\ D_M = 1.5 \\ \Theta_{3dB} = 90^\circ \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} A_e = \frac{3}{8\pi} \lambda^2 \\ R_r = \eta \frac{2\pi}{3} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \end{cases}$$

Spira di corrente (dipolo magno elementare)

$$U_n(\theta) = \sin^2 \theta \quad \text{con} \quad b_M = j\beta S = j \frac{2\pi}{\lambda} S ; \quad I_m l = j\omega q_m l = j\omega \mu_s S$$

Dipolo corto non caricato

$$U_n(\theta) = \sin^2 \theta \quad \text{con} \quad \begin{cases} b_M = l/2 \\ D_M = 1.5 \\ \Theta_{3dB} = 90^\circ \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} A_e = \frac{3}{8\pi} \lambda^2 \\ R_r = \eta \frac{\pi}{6} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \end{cases}, \quad R_l = \frac{lR_s}{4\pi a}$$

Dipolo a semionda non caricato

$$U_n(\theta) = \frac{\cos^2[(\pi/2)\cos\theta]}{\sin^2\theta} \quad \text{con} \quad \begin{cases} b_M = \lambda/\pi \\ D_M = 1.64 \\ \Theta_{3dB} = 78^\circ \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} A_e = \frac{1.64}{4\pi} \lambda^2 \\ R_r = \frac{\eta b^2}{4A_e} \cong 73 \Omega \end{cases}, \quad R_l = \frac{\lambda R_s}{8\pi a}$$

Dipolo a onda intera non caricato

$$U_n(\theta) = \left[\frac{\cos(\pi \cos\theta) + 1}{2\sin\theta} \right]^2 \quad \text{con} \quad \begin{cases} b_M = 2\lambda/\pi \\ D_M = 2.41 \\ \Theta_{3dB} = 47.8^\circ \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} A_e = \frac{2.41}{4\pi} \lambda^2 \\ R_r \cong 165 \Omega \end{cases}$$

Resistenza di radiazione di dipolo ripiegato a semionda.

$$R_{rFD} = 2 \frac{W_r}{|I_0/2|^2} = 4 \left(2 \frac{W_r}{|I_0|^2} \right) = 4R_{rHD} \cong 292 \Omega$$

Res. di radiazione $[\Omega]$ di monopolo rispetto a dipolo

$$R_{rMP} = 2W_{rMP} / |I_0|^2 = W_{rDP} / |I_0|^2 = R_{rDP} / 2$$

B.6.4.4 Principali parametri di Antenne ad apertura

Funzione di radiazione e funzione di illuminazione

$$\underline{F}_t(\theta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{f}_t(\underline{r}_t) e^{j(x'k_0 \sin\theta \cos\varphi + y'k_0 \sin\theta \sin\varphi)} d^2 \underline{r}_t$$

Campo e.m. irradiato in zona lontana

$$\begin{cases} E_{\infty\theta}(\underline{r}) = E_{\infty\theta}(r, \theta, \varphi) = j \frac{1}{\lambda r} e^{-jk_0 r} \left[\cos\varphi F_x(\hat{k}_t) + \sin\varphi F_y(\hat{k}_t) \right] \\ E_{\infty\varphi}(\underline{r}) = E_{\infty\varphi}(r, \theta, \varphi) = j \frac{1}{\lambda r} \cos\theta e^{-jk_0 r} \left[\cos\varphi F_y(\hat{k}_t) - \sin\varphi F_x(\hat{k}_t) \right] \end{cases}$$

Vettore di Poynting a grande distanza in condizioni parassiali

$$\underline{P}_{\infty} \cong \frac{1}{2\eta} \frac{\cos^2\theta}{\lambda^2 r^2} \left[|\underline{F}_t(\hat{k}_t)|^2 \right] \underline{r}_0 \cong \frac{1}{2\eta} \frac{1}{\lambda^2 r^2} \left[|\underline{F}_t(\hat{k}_t)|^2 \right] \underline{r}_0$$

Intensità di radiazione $[W/sr]$ e Potenza trasmessa $[W]$

$$U(\theta, \varphi) \cong \frac{1}{2\eta\lambda^2} |\underline{F}_t(\theta, \varphi)|^2, \quad W_T = \frac{1}{2\eta} \int_A |\underline{E}_t(\underline{r}_t, 0)|^2 d^2 \underline{r}_t = \frac{1}{2\eta} \int_A |\underline{f}_t(\underline{r}_t)|^2 d^2 \underline{r}_t$$

Direttività $[1/sr]$:

$$D(\theta, \varphi) = \frac{P_{\infty}(r, \theta, \varphi)}{W_T} 4\pi r^2 = 4\pi \frac{|\mathbf{E}_f(\theta, \varphi)|^2}{\int_{4\pi} |\mathbf{E}_f(\theta, \varphi)|^2 d\Omega}$$

Area equivalente e $[m^2]$:

$$A_e(\theta, \varphi) = \frac{\lambda^2}{4\pi} D(\theta, \varphi) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_f(\mathbf{r}_f) e^{j\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}_f} d^2\mathbf{r}_f \right|^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{f}_f(\mathbf{r}_f)|^2 d^2\mathbf{r}_f \right]^{-1}$$

Efficienza di apertura, fattorizzazione e angolo solido di radiazione

$$\eta_{aM} = \frac{A_e(0, \varphi)}{A} = \frac{A_{eM}}{A} = \frac{D(0, \varphi)}{D_{Mu}(0, \varphi)} = \frac{D_M}{D_{Mu}} = \eta_i \eta_f, \quad \Omega_A = \int_{4\pi} U_n(\theta, \varphi) d\Omega_s = \int_{4\pi} |\mathbf{E}_{fn}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega_s$$

Apertura rettangolare illuminata con ampiezza uniforme e proprietà

$$f_y(x, y) = f_y^{(x)}(x) f_y^{(y)}(y) = \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right),$$

$$F_y(\theta, \varphi) = ab \cdot \text{sinc}\left(\frac{a \sin \theta \cos \varphi}{\lambda}\right) \text{sinc}\left(\frac{b \sin \theta \sin \varphi}{\lambda}\right) = a \frac{\sin(u)}{u} \cdot b \frac{\sin(v)}{v}$$

$$\Theta_{bNN} \approx \frac{2\lambda}{a}, \quad L_{S1dB} \approx 20 \log \frac{2}{3\pi} = -13.46 \text{ dB}, \quad D_M = \frac{4\pi}{\lambda^2} ab \Rightarrow A_{eM} = ab, \Rightarrow \eta_a = 1,$$

Apertura rettangolare illuminata con ampiezza triangolare e proprietà

$$f_y^{(x)}(x) = \Lambda\left(\frac{x}{a}\right) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{a}{2} \cdot \text{sinc}^2 \frac{ak}{4\pi}\right\},$$

$$F_y(\theta, \varphi) = F_y(\mathbf{k})|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0} = \frac{ab}{2} \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{a \sin \theta \cos \varphi}{2\lambda}\right) \text{sinc}\left(\frac{b \sin \theta \sin \varphi}{\lambda}\right)$$

$$\Theta_{bNN} \approx \frac{4\lambda}{a}, \quad L_{S1dB} \approx 20 \log \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2 = -26.9 \text{ dB}, \quad D_M = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{3ab}{4} \Rightarrow A_{eM} = \frac{3}{4} ab \Rightarrow \eta_a = 0.75$$

Effetti della rastremazione della funzione di illuminazione e prima zona di Fresnel

$$f(x) = \left(\cos \frac{\pi x}{a}\right)^n, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} F(u) \approx \frac{1}{u^{m+1}}, \quad r_I = r_F = \frac{2a^2}{\lambda}$$

Scansione elettronica del fascio e apertura angolare $[\circ]$

$$F_y(\theta, 0) = c F_y^{(x)}(u) = c \int_{-\infty}^{\infty} |f_y^{(x)}(x)| e^{jk_0(\sin \theta + \sin \theta_0)x} dx = c F_y(u + u_0),$$

$$\Theta_{NN-pp} = \alpha_{pp} \frac{\lambda}{D_{pp} \cos(\theta_0)}$$

Tromba rastremata sul piano E

$$E_y(x, y) = E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jk_z y^2 / 2\rho_1}, \quad b_{1opt} \approx \sqrt{2\lambda\rho_1}, \quad D_{Eopt} \approx \frac{32ab_{1opt}}{\lambda^2 \pi} \frac{1}{1.25} = \frac{4\pi}{\lambda^2} 0.64(ab_{1opt})$$

Tromba rastremata sul piano H

$$E_y(x, y) = E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a_1} x\right) e^{-jk_z x^2 / 2\rho_2}, \quad a_{1opt} \approx \sqrt{3\lambda\rho_2}, \quad D_{MHopt} \approx \frac{32a_{1opt}b}{\lambda^2 \pi} \frac{1}{1.3} = \frac{4\pi}{\lambda^2} (0.62a_{1opt}b)$$

B.6.4.5 Principali parametri di Antenne a riflettore

Ottica geometrica e campo e.m. approssimato con funzione iconale

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-jkL(\mathbf{r})},$$

$$\int_{s_1}^{s_2} n(s) ds = L(s_2) - L(s_1) = L_2 - L_1 \quad \text{Teorema di uguale percorso ottico}$$

$$|\underline{E}_o(s_2)| = |\underline{E}_o(s_1)| \sqrt{\frac{dA_1}{dA_2}} = |\underline{E}_o(s_1)| \delta_f \quad \text{Teorema del tubo di flusso}$$

Metodo dell'apertura di bocca

$$\underline{E}_{\infty\theta}(\underline{r}) = \frac{j}{\lambda r} e^{-jk_o r} \int_A (f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi) e^{jk_o \underline{r}_o \cdot \underline{r}'_t} d^2 \underline{r}'_t = \frac{j}{\lambda r} e^{-jk_o r} (F_x \cos \varphi + F_y \sin \varphi)$$

$$\underline{E}_{\infty\varphi}(\underline{r}) = -\frac{j}{\lambda r} e^{-jk_o r} \cos \theta \int_A (f_x \sin \varphi - f_y \cos \varphi) e^{jk_o \underline{r}_o \cdot \underline{r}'_t} d^2 \underline{r}'_t = -\frac{j}{\lambda r} e^{-jk_o r} \cos \theta (F_x \sin \varphi - F_y \cos \varphi)$$

Metodo delle correnti indotte (ottica fisica)

$$\underline{K} = \underline{n}_o \times \underline{H} = \underline{n}_o \times (\underline{H}_i + \underline{H}_r) = 2(\underline{n}_o \times \underline{H}_i)$$

$$\underline{E}_{\infty}(\underline{r}) = +\frac{j\omega\mu}{4\pi r} e^{-jk_o r} \int_S \underline{r}_0 \times \underline{r}_0 \times \underline{K} e^{j\underline{k} \cdot \underline{r}'} d^3 \underline{r}'$$

Antenna a riflettore parabolico

$$r(\theta) = \frac{2f}{1 + \cos \theta} = \frac{f}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = f \sec^2 \frac{\theta}{2}, \quad A = \pi \left(\frac{D_a}{2} \right)^2, \quad \frac{f}{D_a} = \frac{\text{tg}(\theta_M/2)}{4} \quad \text{Equazioni geometriche}$$

$$P_a(\rho, \varphi) = \frac{U_i(\theta, \varphi)}{[r(\theta)]^2} = \frac{U_i(\theta, \varphi)}{f^2} \cos^4 \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad \text{Densità di potenza sulla bocca}$$

$$\begin{cases} |f_t(x, y)| = |f_t(\rho, \varphi)| = \sqrt{2\eta P_a(\rho, \varphi)} = \sqrt{2\eta U_i(\theta, \varphi)} \frac{1}{f} \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ \angle f_t(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{Illuminazione su apertura di bocca}$$

$$R_p = \frac{4f^2}{4f^2 + \rho^2} = \frac{4D_a^2 \frac{\text{tg}^2(\theta_M/2)}{4}}{4 \left[D_a^2 \frac{\text{tg}^2(\theta_M/2)}{4} \right] + \rho^2} = \frac{1}{1 + \frac{\rho^2}{D_a^2} \text{tg}^2(\theta_M/2)} \quad \text{Rapporto di rastremazione}$$

$$\eta_s = \frac{W_T}{W_{iT}} = \frac{\int_0^{\theta_M} \int_0^{\theta_M} U_i(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi}{\int_0^{\theta_M} \int_0^{\theta_M} U_i(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi} \quad \text{Efficienza di dispersione o spillover}$$

$$G_M = 4\pi \frac{U_M}{W_G} = \eta_{ir} \eta_s \left(4\pi \frac{U_M}{W_T} \right) = (\eta_{ir} \eta_{im} \eta_{ip}) \eta_s \eta_a D_{Mu} \quad \text{Guadagno di antenna a riflettore}$$

Antenna a doppio riflettore

$$\rho_{dr} = \frac{f_e}{f} = \frac{\text{tg}(\psi_p/4)}{\text{tg}(\psi_r/4)} \geq 1; \quad \rho_{bs} = \frac{D_{ap}}{D_{as}} \geq 1$$

B.6.4.6 Principali parametri di Allineamenti di antenne

Principio di similitudine dell'allineamento

$$\underline{r}'_k = \underline{r}'_o + \underline{r}'_k \quad \underline{J}_k(\underline{r}'_k) = \underline{J}_k(\underline{r}'_o + \underline{r}'_k) = a_k \underline{J}_o(\underline{r}'_o)$$

Campo e.m. lontano irradiato

$$E_{\theta}(\mathbf{r}) = \sum_{k=0}^{n-1} E_{k\theta}(\theta, \phi) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi r} e^{-jkr} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{0\theta}(\mathbf{r}'_0) e^{jk_z \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}'_0} d^3 \mathbf{r}'_0 \right) \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{jk_z \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_k} = -\frac{j\omega\mu}{4\pi r} e^{-jkr} F_0(\theta, \phi) F_c(\theta, \phi)$$

$$E_{\phi}(\mathbf{r}) = \sum_{k=0}^{n-1} E_{k\phi}(\theta, \phi) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi r} e^{-jkr} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{0\phi}(\mathbf{r}'_0) e^{jk_z \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}'_0} d^3 \mathbf{r}'_0 \right) \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{jk_z \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_k} = -\frac{j\omega\mu}{4\pi r} e^{-jkr} F_0(\theta, \phi) F_c(\theta, \phi)$$

$$F_0(\theta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\mathbf{r}'_0) e^{jk_0 \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}'_0} d^3 \mathbf{r}'_0, \quad \text{Fattore di radiazione del singolo radiatore}$$

$$F_c(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{jk_0 \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_k} = \sum_{i=1}^n a_i e^{jk_0 \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_i} \quad \text{Fattore di cortina}$$

$$\begin{cases} P_{\infty}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2\eta} (|E_{\infty\theta}|^2 + |E_{\infty\phi}|^2) = P_{0\infty}(\theta, \varphi) |F_c(\theta, \varphi)|^2 \\ U(\theta, \varphi) = P_{\infty}(\theta, \varphi) r^2 = U_0(\theta, \varphi) |F_c(\theta, \varphi)|^2 \end{cases} \quad \text{Densità di potenza e intensità di radiazione}$$

Allineamenti rettilinei equidistanti e a sfasamento lineare progressivo

$$F_c(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| e^{jk_0 \delta} e^{jk_0 k d \cos \theta} = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| e^{jk_0 u} \quad \text{Fattore di cortina}$$

$$u = \delta + k_0 d \cos \theta = \delta + \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \theta \quad \text{Variabile di radiazione dell'allineamento}$$

Allineamenti rettilinei equidistanti e a sfasamento lineare progressivo con alimentazione uniforme 1/n

$$F_c(\theta) = F_c(u) = \frac{1}{n} e^{j(n-1)\frac{u}{2}} \frac{\sin n\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \quad \text{Fattore di cortina}$$

$$n=1 \quad \rightarrow \quad |F_c| = 1 \quad \text{Fattore di cortina per singolo radiatore}$$

$$n=2 \quad \rightarrow \quad |F_c| = \cos \frac{u}{2} \quad \text{Fattore di cortina per doppietto di radiatori}$$

$$n=4 \quad \rightarrow \quad |F_c| = \frac{1}{4} \frac{\sin 2u}{\sin \frac{u}{2}} \quad \text{Fattore di cortina per quadrupletto}$$

Antenna Yagi-Uda

$$I_2 = \frac{|Z_{21}|}{|Z_{22}|} e^{j(\pi + \varphi_{12} - \varphi_{22})} I_1 = \frac{65}{73} e^{j(\pi - \varphi_{22})} I_1 \quad \text{Corrente indotta approssimata}$$

Antenna log-periodica dipolare

$$\frac{l_{n+1}}{l_n} = \frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{1}{\tau} \quad \text{Vincoli geometrici}$$